

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA E  
SISTEMAS MECÂNICOS

RAFAEL TRALDI MOURA

nota final 9.8  
(nove e oito)

htrm

Correção da Dispersão de Sinais na  
Caracterização Dinâmica de Materiais  
Utilizando a Barra de Hopkinson

207

Trabalho de formatura apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo para  
obtenção do Título de Graduação em Engenharia.

São Paulo  
2006



RAFAEL TRALDI MOURA

**Correção da Dispersão de Sinais na  
Caracterização Dinâmica de Materiais  
Utilizando a Barra de Hopkinson**

**Trabalho de formatura apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de São Paulo para  
obtenção do Título de Graduação em Enge-  
nharia.**

São Paulo  
2006

TF.06  
M 866 c

**DEDALUS - Acervo - EPMN**



31600012469

**FICHA CATALOGRÁFICA**

15-15966

**Moura, Rafael Traldi**

Correção da dispersão de sinais na caracterização dinâmica de materiais utilizando a barra de Hopkinson / R.T. Moura – São Paulo, 2006.

122 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Ensaio de propriedades mecânicas 2.Mecânica dos Sólidos (Impacto) 3.Propagação de ondas mecânicas I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Orient. Marcilio Alves

*Aos meus pais, que me deram todo o suporte emocional, psicológico e financeiro para que eu alcançasse todos os desejos aspirados e à minha irmã que sempre me ofereceu o seu amparo, sua atenção e seu carinho.*



# AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marcilio Alves, que, em um breve período, me mostrou, entre tantos caminhos possíveis, o mais correto, estando sempre presente ativamente.

Aos meus pais, irmã e avós, que me apoiaram em todos os instantes.

À professora Larissa Driemeier, pela atenção concedida durante o processo de realização deste projeto.

Ao professor Carlos Alberto Nunes Dias, pelo incentivo e auxílio.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela formação acadêmica.

Ao Grupo Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas, por colocar a disposição seu laboratório e aparelhagem.

Aos meus amigos Leonardo Gutierre, Renata Perssona Heszki e Tiago Próspero, de São Bernardo do Campo, Ana, Bruno e Carlos, da faculdade, e André, Bruno, Daniel, Giancarlo, Rafael, Renato, Roberto e Ruben, do laboratório do Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas.



## RESUMO

A caracterização dinâmica dos materiais é um assunto na mecânica e o principal equipamento utilizado em testes dinâmicos é a Split Hopkinson Pressure Bar (SPHB). Este permite a propagação de ondas elásticas em duas barras longas, de entrada e de saída. Uma amostra a ser testada é colocada entre as barras e os pulsos incidente, refletido e transmitido são medidos e permitem obter a curva tensão-deformação do material a uma taxa de deformação. Para evitar superposição dos pulsos incidente e refletido, estes são medidos em uma posição distante da amostra. Entretanto, durante a propagação, o pulso muda seu formato no tempo devido a um fenômeno conhecido por dispersão. Neste trabalho são corrigidos os efeitos da dispersão, a partir da solução da equação de propagação de ondas em barras cilíndricas. Um mapa de velocidade de fase em função da frequência é gerado, permitindo saber a velocidade de fase de cada componente de frequência. O sinal é então corrigido utilizando um algoritmo em Matlab. Os resultados demonstram que a correção afeta o formato da curva tensão-deformação. Concluiu-se que a correção da dispersão é um procedimento necessário a caracterização dinâmica do material. Este procedimento está detalhado no trabalho e é de uso imediato.



# ABSTRACT

The dynamic material characterization is a fundamental issue in structural mechanics and the main apparatus used to perform dynamic tests is the so called Split Hopkinson Pressure Bar, SHPB. This device allows the propagation of elastic waves in long incident and transmitted bars. In between the bars, the sample to be tested is placed and the measurement of the incident, reflected and transmitted pulses in the bars allows to calculate the material dynamic strength and the strain rate the sample was submitted. To avoid superposition of the incident and reflected pulses, the measurement station of the pulses is placed far from the sample. However, the pulse, by traveling along the bars change its shape in amplitude and time due to a phenomenon called dispersion. In this work, this effect is corrected by first solving the equations of waves in cylindrical bars. A wave speed versus frequency map is generated, which allows to know the speed of each wave frequency component. Hence, the signals can be corrected using a MatLab algorithm. It is shown, using experimental results, that the correction affects the shape of the stress-strain curve. It is concluded that the dispersion correction is a necessary procedure in the dynamic material characterization. Such a procedure is here detailed and can be of immediate use.



# Lista de Figuras

1.1	Máquina de Ensaio Estático do Laboratório do GMSIE	3
1.2	Percurso do Martelo do Laboratório do GMSIE	4
1.3	Peso e Área para colocação do corpo de prova do Laboratório do GMSIE	4
1.4	Anel de Expansão	5
1.5	Barra de Hopkinson do Laboratório do GMSIE	6
2.1	Elemento infinitesimal em equilíbrio dinâmico	9
2.2	Elemento diferencial da barra cilíndrica	27
2.3	Posição no tempo demonstrando o movimento descontínuo produzido por repetidas reflexões de um pulso de pressões longitudinais. Movimento de <i>(A)</i> na face da frente da barra, <i>(B)</i> no ponto médio, <i>(C)</i> na face de trás, <i>(D)</i> no centro de gravidade. As deformações foram exageradas no sentido de facilitar a compreensão do fenômeno	33
2.4	Velocidades de diversos tipos de onda	46
3.1	Barras do Teste de Hopkinson	50
4.1	Soluções da equação de frequências para diversos valores de coeficiente de Poisson	59
4.2	Velocidade de Fase em função da Frequência	60
4.3	Velocidade de Grupo em função da Frequência	61
4.4	Mapa de Correções	62

5.1	Sinais adquiridos em ambos os extensômetros.	64
5.2	FFT do pulso incidente.	65
5.3	Pulso inicial	65
5.4	FFT do pulso ideal	66
5.5	Mapa de correção	67
5.6	Tempos utilizados no pulse shifting em função da frequência	67
5.7	FFT do pulso corrigido	68
5.8	Sinais no tempo de pontos com 900mm de distância	69
6.1	Ondas nos dois extensômetros corrigidas em função dos pulsos refletido e transmitido	72
6.2	Resultados antes e após correção	73
6.3	Tensão x deformação de um teste em um anel de aço com pressão de 2 bar no striker	74
6.4	Taxa de Deformação no tempo de um teste em um anel de aço com pressão de 2 bar no striker	74

# Lista de Tabelas

2.1 Velocidade de barra para alguns materiais

29



# Lista de Abreviaturas e Siglas

SHPB	Split Hopkinson Pressure Bar
HPB	Hopkinson Pressure Bar
BH	Barra de Hopkinson



# Lista de Símbolos

$\sigma$	tensão mecânica	Pa
$\varepsilon$	deformação mecânica	adimensional
$E$	módulo elástico	Pa
$A$	constante do material para modelo de Johnson Cook	Pa
$B$	constante do material para modelo de Johnson Cook	Pa
$\varepsilon_0$	constante do material para modelo de Johnson Cook	1/s
$\sigma_S$	constante do material para modelo de Cowper Symonds	Pa
$D$	constante do material para modelo de Cowper Symonds	1/s
$q$	constante do material para modelo de Cowper Symonds	adimensional
$F$	Força	N
$\rho$	densidade	Kg/m <sup>3</sup>
$u$	deslocamento em $x$	m
$v$	deslocamento em $y$	m
$w$	deslocamento em $z$	m
$\lambda$	constante de Lamé	Pa
$\mu$	constante de Lamé	Pa
$\nu$	coeficiente de Poisson	Pa
$k$	módulo volumétrico	Pa

---

$\Delta$	dilatação	adimensional
$V_{long}$	velocidade de onda longitudinal	m/s
$V_{shear}$	velocidade de onda de cisalhamento	m/s
$\phi$	função potencial	m <sup>2</sup>
$\varphi$	função potencial	m <sup>2</sup>
$p$	velocidade angular da onda	rad/s
$c$	velocidade da onda	m/s
$d$	frequência	Hz
$\Lambda$	comprimento de onda	m
$f$	número de onda	rad/m
$V_{Rayleigh}$	velocidade de onda de Rayleigh	rad/s
$V_0$	velocidade unidirecional de propagação de onda	m/s
$V_f$	velocidade de fase	m/s
$V_g$	velocidade de grupo	m/s
$u_r$	deslocamento no eixo $r$ em coordenadas cilíndricas	m
$u_\theta$	deslocamento no eixo $\theta$ em coordenadas cilíndricas	m
$u_z$	deslocamento no eixo $z$ em coordenadas cilíndricas	m
$\gamma$	numero de onda	rad/m
$J$	função de Bessel	adimensional
$F(\omega)$	transformada de Fourier	adimensional
$F_n$	transformada discreta de Fourier	adimensional
$V$	voltagem	dimensional
$\varepsilon_i(t)$	Onda de deformação no tempo na barra de entrada gerada antes do pulso atingir o corpo de prova	adimensional
$\varepsilon_r(t)$	Onda de deformação no tempo na barra de entrada gerada depois do pulso atingir o corpo de prova	adimensional
$\varepsilon_t(t)$	Onda de deformação no tempo na barra de saída gerada depois do pulso atingir o corpo de prova	adimensional

---

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Caracterização do material	3
1.1.1 Caracterização estática	3
1.1.2 Caracterização dinâmica	3
1.2 Estrutura do trabalho	6
<b>2 Fundamentos Teórico</b>	<b>7</b>
2.1 Ondas elásticas em meios infinitos	7
2.1.1 Tipos de ondas elásticas	7
2.1.2 Equações de equilíbrio	8
2.1.3 Lei de Hooke generalizada	10
2.1.4 Propagação de ondas elásticas no contínuo	13
2.1.5 Velocidade de ondas longitudinais	15
2.1.6 Velocidade de ondas de cisalhamento	17
2.1.7 Considerações sobre velocidades de ondas longitudinal e de cisalhamento	18
2.1.8 Ondas de Rayleigh	20
2.2 Ondas elásticas em meios finitos	26
2.2.1 Ondas longitudinais em barras cilíndricas finas	26
2.2.2 Características da propagação de ondas	28
2.3 Forma vetorial das equações de onda	34

---

2.4	Mudando para sistemas de coordenadas curvos	35
2.5	Equações de movimento em coordenadas cilíndricas	37
2.6	Equações de Pochammer-Chree para barras cilíndricas	38
2.6.1	Equações de Pochammer-Chree para ondas longitudinais em cilindros	40
2.7	Comparação entre velocidades dos tipos de onda	46
2.8	séries e transformadas de fourier	47
<b>3</b>	<b>Barra de Hopkinson</b>	<b>49</b>
3.1	Origem e passado da Barra de Hopkinson	51
3.2	Modelagem matemática da Barra de Hopkinson	53
<b>4</b>	<b>Resolvendo a Equação de Frequências</b>	<b>57</b>
4.1	Introdução	57
4.2	Resolvendo a equação de Pochammer-Chree	58
4.3	Velocidade de grupo	60
4.4	Mapa de correções	61
<b>5</b>	<b>Obtenção e Tratamento do Sinal</b>	<b>63</b>
5.1	Curvas a serem geradas	63
5.2	Descrição do sinal adquirido	64
5.3	Exemplo da correção de um pulso ideal	64
<b>6</b>	<b>Testes e Resultados Obtidos</b>	<b>71</b>
6.1	Testes realizados na Barra de Hopkinson	71
<b>7</b>	<b>Discussões e Conclusões</b>	<b>75</b>
7.1	Conclusões	75
7.2	Trabalhos futuros	76
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Arquivos .m</b>	<b>83</b>
A.1	resolvendo a equação de frequências para diferentes valores de $\nu$	83
A.2	resolvendo a equação de frequências, encontrando os diferentes modos de vibrar	86
A.3	criando o mapa de velocidades de fase em função da frequência	91
A.4	corrigindo um pulso trapezoidal - descobrindo o sinal 900mm antes do ponto de leitura	96

# Capítulo 1

## Introdução

Podemos simplificar o processo de engenharia nas seguintes etapas:

- Análise do problema;
- modelagem;
- solução.

Durante a modelagem, são utilizados elementos simples, como treliças, vigas, entre outros, que possuem comportamento conhecido. Através destes comportamentos somos capazes de verificar falhas dimensionar estruturas. Para descobrirmos estes, precisamos da equação governante do elemento.

A equação governante é obtida a partir da *equação constitutiva* e da *equação de equilíbrio*. A primeira vem do equilíbrio de forças em um elemento infinitesimal. A segunda vem da verificação do comportamento do material.

No intuito de verificar o comportamento do material, foram desenvolvidas diversas modelagens matemáticas para o mesmo. Deste modo, a equação constitutiva é uma modelagem do material cujas propriedades estão presentes na forma de constantes. Podemos citar como equações constitutivas a Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \quad (1.1)$$

---

a de Johnson Cook

$$\sigma_d = (A + B\varepsilon^n) \left( 1 + \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right) \right) , \quad (1.2)$$

ou a de Cowper-Symonds

$$\sigma_d = \sigma_s \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{D} \right)^{\frac{1}{q}} \right] . \quad (1.3)$$

Caracterização do material é o processo de identificar as constantes da Equação Constitutiva, que variam de material para material . Pode-se fazer uma caracterização estática ou dinâmica.

A caracterização dinâmica se tornou importante no momento em que foi percebido a mudança no comportamento de alguns materiais em razão da variação na velocidade de aplicação da carga. Segundo Meyers [20], Bertram Hopkinson descobriu em 1905 que o conforme a taxa de deformação aumenta, a fratura do aço passa de dúctil a frágil.

Um exemplo de fácil compreensão para entendermos como um material pode variar suas características com a variação da taxa de deformação é o do impacto de uma faca e uma bala em sacos de areia e uma tábua de madeira. Imagine uma barreira de sacos de areia. Essa proteção é capaz de segurar uma bala atirada, mas é facilmente vencida pelo impacto de uma lâmina de uma faca afiada. Imagine agora um tábua de madeira. Uma bala atirada contra a mesma irá perfurá-la, mas ela será facilmente capaz de parar a faca. Isso acontece devido a mudança no comportamento dos sacos de areia e da madeira, já que as taxas de deformação em um impacto de uma faca são muito menores do que do impacto de uma bala.

## 1.1 Caracterização do material

### 1.1.1 Caracterização estática

O ensaio estático é realizado em uma máquina como a da figura (1.1), presente no laboratório do GMSIE. Um deslocamento é imposto no tempo e medido através de encoders ou extensômetros e a força é medida em células de carga, traçando-se um gráfico força x deslocamento. Tratando-se estes sinais, podemos descobrir o gráfico tensão x deformação e a partir de então utilizar processos de otimização para encontrar parâmetros de leis constitutivas aproximando-as o máximo possível da curva experimental.

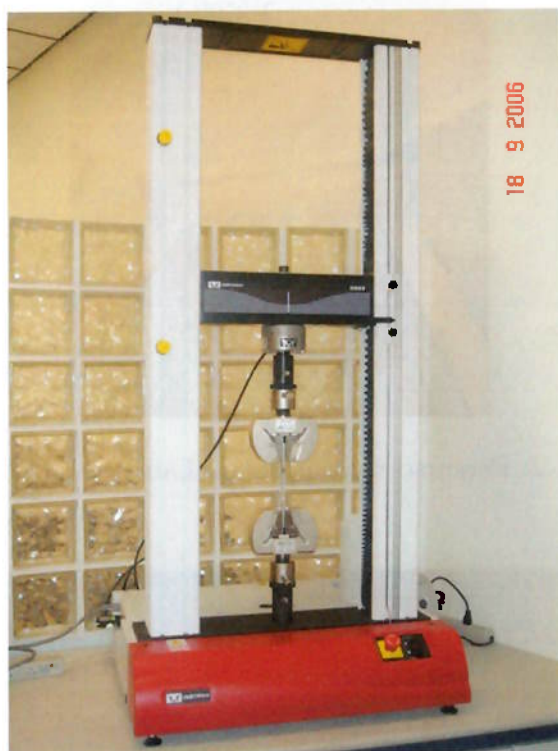


Figura 1.1: Máquina de Ensaio Estático do Laboratório do GMSIE

### 1.1.2 Caracterização dinâmica

O processo de caracterização dinâmica precisa fornecer, além da curva tensão x deformação, a variação da taxa de deformação durante o ensaio experimental. Existem mais de

um tipo de ensaio de caracterização dinâmica, como o na máquina Dynapak, no anel de expansão ou na Barra de Hopkinson.

Na máquina Dynapak, um pistão é acelerado por pressão e impacta um corpo de prova cilíndrico. Uma simplificação é o aparato chamado martelo, no qual usa-se um peso livre ao invés do pistão acelerado por pressão. As figuras (1.2) e (1.3) são do martelo presente no laboratório do GMSIE.



Figura 1.2: Percurso do Martelo do Laboratório do GMSIE



Figura 1.3: Peso e Área para colocação do corpo de prova do Laboratório do GMSIE

Outro método é o anel de expansão, no qual é construído um cilindro e o mesmo tem seu centro perfurado, na intenção de se alojar um explosivo. Na superfície lateral, coloca-se um anel e a deformação do mesmo durante a explosão é feita por interferometria. A figura (1.4) exemplifica este método.

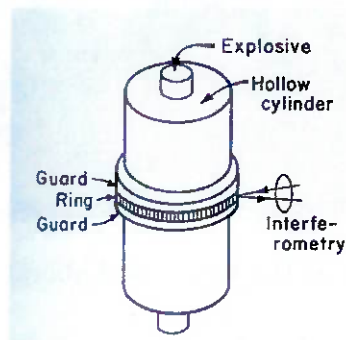


Figura 1.4: Anel de Expansão

O método da Barra de Hopkinson consiste em atirar ,através de um gas gun, uma barra cilíndrica, denominada striker, contra um conjunto de três elementos: barra de entrada, corpo de prova e barra de saída. As barras de entrada e saída são projetadas para sofrerem apenas deformação elástica, o que não acontece com o corpo de prova. Extensômetros podem mediar estas deformações elásticas e através delas construímos a curva tensão deformação do material. Ao percorrer as barras de entrada e saída, estes pulsos de deformação se modificam. Essa modificação é conhecida pelo nome de *Dispersão*. O objetivo do trabalho é entender e descobrir como a dispersão altera o pulso de pressão, sendo capazes então de conhecer o pulso em qualquer posição da barra a partir da leitura de uma única posição. O laboratório do GMSIE possui uma Barra de Hopkinson e está se encontra na figura (1.5).



Figura 1.5: Barra de Hopkinson do Laboratório do GMSIE

## 1.2 Estrutura do trabalho

O capítulo 2 é o de fundamentos teóricos e vai detalhadamente desde o equilíbrio de forças de um elemento diferencial até a obtenção da equação de frequências.

O capítulo 3 explica como funciona a Barra de Hopkinson e seu desenvolvimento na história.

O capítulo 4 resolve a equação de frequências e explica como corrigir a dispersão.

O capítulo 5 define os sinais adquiridos e simula a correção passo a passo a correção da dispersão.

O capítulo 6 apresenta e comenta alguns resultados.

O ultimo capítulo, 7, faz uma pequena discussão, conclusão e propõe trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Fundamentos Teórico

### 2.1 Ondas elásticas em meios infinitos

#### 2.1.1 Tipos de ondas elásticas

Diferentes tipos de ondas podem se propagar em sólidos, dependendo de como o movimento das partículas está relacionado com a direção de propagação da onda e das condições de contorno. Uma partícula pode ser descrita como uma pequena porção de matéria, mas não como um átomo, que possui uma direção de movimento diferente da direção geral de movimento por causa de restrições cristalográficas. Os tipos mais comuns de ondas elásticas são:

1. Ondas longitudinais ou irrotacionais: também conhecidas como ondas de dilatação, correspondem ao movimento para a frente e para trás ao longo da direção de propagação da onda tornando a velocidade da partícula paralela a velocidade da onda. Se a onda é de compressão, ambas as velocidades possuem o mesmo sentido. Se for de tração, os sentidos são diferentes;
2. Ondas distorcionais ou de cisalhamento: a direção do movimento das partículas é perpendicular a direção de propagação da onda. Não há variação de densidade e todas as componentes de deformação longitudinais são nulas;
3. Ondas de Superfície ou ondas de Rayleigh: as ondas de superfície são análogas

as encontradas na superfície da água. Objetos flutuantes podem ser considerados partículas e descreverem um movimento tanto para cima e para baixo quanto para a frente e para trás, descrevendo uma trajetória elíptica. Este tipo de onda está restrito a região prontamente próxima à superfície, já que a velocidade da partícula decresce exponencialmente com a distancia da propria superfície;

4. Onda interfacial ou de Stoneley: Quando dois materiais semi-infinitos com propriedades diferentes estão em contato, surgem ondas especiais na interface;
5. Ondas em materiais compostos por camadas ou ondas de Love: importantes em sismologia, descrevem ondas no qual a componente de deslocamento horizontal é significativamente maior que a componente vertical, sendo então diferentes das ondas de Rayleigh. As camadas podem vir a ter diferentes propriedades, originando padrões de ondas especiais;
6. Ondas de flexão: envolvem a propagação de uma flexão em um meio unidimensional, no caso de barras, ou bi-dimensional, no caso de placas e cascas.

### 2.1.2 Equações de equilíbrio

As tensões que atuam nos planos normais aos eixos Ox, Oy e Oz são  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$ , nas quais o primeiro índice indica a direção normal ao plano em que atuam e o segundo indica a direção em que atuam. No equilíbrio estático, a somatório de forças e a de momentos em todas as direções são nulas, conforme (2.1):

$$\sum F = 0 \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad e \quad \sum M = 0 \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Mas quando não estamos em equilíbrio estático, as tensões atuando em faces opostas não são iguais. Para deduzirmos as equações de equilíbrio, iremos analisar um cubo de

dimensões infinitesimais, com tensões perpendiculares e tangenciais em cada face, como na figura (2.1).

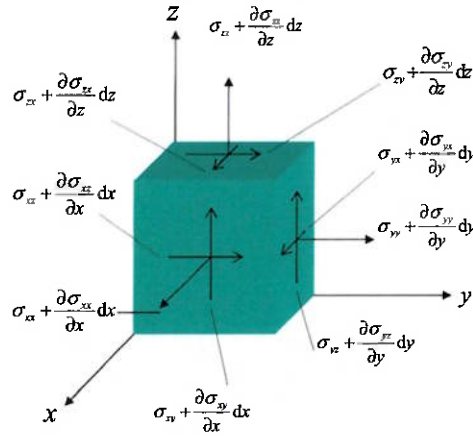


Figura 2.1: Elemento infinitesimal em equilíbrio dinâmico

A segunda lei de Newton pode ser expressa nas três direções conforme

$$F_x = ma_x \quad F_y = ma_y \quad F_z = ma_z \quad (2.2)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= (\rho \, dx \, dy \, dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \sum F_y &= (\rho \, dx \, dy \, dz) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \sum F_z &= (\rho \, dx \, dy \, dz) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Na direção Ox, temos as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy$ ,  $\sigma_{zx}$  e  $\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz$ .

Considerando o somatório de forças, teremos:

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx} \right) dy \, dz + \left( \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy - \sigma_{yx} \right) dz \, dx + \\ \left( \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz - \sigma_{zx} \right) dx \, dy = (\rho \, dx \, dy \, dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

E, dividindo ambos os lados por  $dx dy dz$ , teremos:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

De maneira análoga, encontramos:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Lei de Hooke generalizada

Para a maioria dos materiais, é demonstrado experimentalmente que a carga aplicada e a deformação são linearmente proporcionais.

Vamos calcular o equilíbrio de momentos em um cubo infinitesimal para descobrirmos relações entre as 9 tensões do mesmo.

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dy dx \right] \frac{dz}{2} + (\sigma_{zx}) dy dx \frac{dz}{2} \\ & - \left[ \left( \sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz \right] \frac{dx}{2} - (\sigma_{xz}) dy dz \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Fazendo  $dz^2 = 0$  e  $dx^2 = 0$  e dividindo tudo por  $dx dy dz$

$$\sigma_{zx} - \sigma_{xz} = 0 \quad \therefore \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (2.9)$$

Desta forma reduzimos o numero de tensões de 9 para 6.

As deformações são definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Segundo Love ([18] p.99), cada um dos 6 componente de tensão linearmente independentes pode ser escrito em função da uma combinação linear dos 6 componentes de deformação correspondentes da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{13}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\varepsilon_{zy} + c_{15}\varepsilon_{xz} + c_{16}\varepsilon_{yx} \\ \sigma_{yy} = c_{21}\varepsilon_{xx} + c_{23}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\varepsilon_{zy} + c_{25}\varepsilon_{xz} + c_{26}\varepsilon_{yx} \\ \sigma_{zz} = c_{31}\varepsilon_{xx} + c_{33}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\varepsilon_{zy} + c_{35}\varepsilon_{xz} + c_{36}\varepsilon_{yx} \\ \sigma_{zy} = c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{43}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} + c_{44}\varepsilon_{zy} + c_{45}\varepsilon_{xz} + c_{46}\varepsilon_{yx} \\ \sigma_{xz} = c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{53}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} + c_{54}\varepsilon_{zy} + c_{55}\varepsilon_{xz} + c_{56}\varepsilon_{yx} \\ \sigma_{yx} = c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{63}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} + c_{64}\varepsilon_{zy} + c_{65}\varepsilon_{xz} + c_{66}\varepsilon_{yx} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Sendo  $c_{ij}$  as constantes elásticas. Ainda segundo Love ([18] p.99), para que a energia elástica seja uma função univalente ( $f(x)$  é uma função univalente numa região  $D$  se  $\forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ ),  $c_{ij} = c_{ji}$ , reduzindo o número de constantes elásticas de 36 para 21.

Se a rede cristalina do material possuir algum plano ou eixo de simetria, este numero de constantes reduz-se mais ainda. Mais especificamente para uma rede cristalina cúbica, existem apenas 3 constantes.

Em um sólido isotrópico, o valor dos coeficientes deve ser constantes para qualquer configuração de eixos escolhida, sobrando apenas então 2 constantes elásticas, definidas por  $\lambda$  e  $\mu$ , sendo:

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = \lambda, \\ c_{44} &= c_{55} = c_{66} = \mu, \\ c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu. \end{aligned}$$

com as outras 25 constantes elásticas nulas. Desta forma, podemos reescrever (2.11)

como:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zy} = \mu\varepsilon_{zy} \\ \sigma_{xz} = \mu\varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yx} = \mu\varepsilon_{yx} \end{cases} \quad (2.12)$$

com  $\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$  representando a variação de volume, sendo chamado de dilatação. As constantes  $\lambda$  e  $\mu$  são conhecidas como constantes de Lamé e somente as duas definem completamente o comportamento de um material elástico isotrópico. Por convenção, usamos 4 constantes: módulo de elasticidade  $E$ , coeficiente de Poisson  $\nu$ , módulo volumétrico (bulk modulus)  $k$  e módulo de rigidez que é idêntico a constante de Lamé  $\mu$ .

Usando as equações de (2.12), podemos expressar  $E, \nu$  e  $k$  em função de  $\lambda$  e  $\mu$ .

$E$  pode ser definido como a relação entre a tensão aplicada e deformação, considerando-se um espécime cilíndrico sujeito a tensão uniforme nos planos das extremidades e com a superfície lateral livre de restrições. Considerando o eixo  $x$  paralelo ao eixo do cilindro,  $\sigma_{xx}$  é a tensão aplicada e as outras 5 componentes de tensão são nulas. Obtemos então:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \sigma_{xx} \\ (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) = 0 \\ (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx} \quad e \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (2.14)$$

Sabendo-se que o módulo de Elasticidade  $E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}$ , temos que:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.15)$$

O coeficiente de Poisson  $\nu$  é definido pela relação entre a deformação de compressão lateral e a deformação de tração axial, novamente em um cilindro com superfície lateral livre de restrições, ou seja,  $-\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$ , resultando em:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.16)$$

Por ultimo, define-se o módulo volumétrico  $k$  como a relação entre a pressão aplicada e o negativo da dilatação. Desta forma:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P \quad e \quad \sigma_{zy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yx} = 0,$$

então:

$$k = \frac{P}{\Delta} = \lambda + \frac{2\mu}{3} \quad (2.17)$$

O módulo de cisalhamento ou rigidez  $\mu$  é a relação entre a relação a tensão de cisalhamento e a deformação de cisalhamento, coincidindo com a constante de Lamé  $\mu$ .

### 2.1.4 Propagação de ondas elásticas no contínuo

Na introdução foram deduzidas equações de equilíbrio dinâmico de um cubo de dimensões infinitesimais. Agora que conhecemos a relação entre tensões e deformações e a relação entre deformações e deslocamentos, podemos desenvolver mais as equações (2.5), (2.6) e (2.7).

De acordo com a relação entre tensões e deformações (2.12), partimos de:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

para

$$\frac{\partial(\lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\varepsilon_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\varepsilon_{xz})}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ou

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Substituindo-se as deformações por suas definições, como visto em (2.10), obtemos:

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

Agrupando de outra maneira:

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

Colocando  $u$  e  $\frac{\partial}{\partial x}$  em evidencia:

$$\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

Definindo-se o operador  $\nabla^2$  como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.23)$$

e conforme as relações (2.10), chegamos a:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} (\Delta) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

ou:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Similarmente:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.26)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

As equações (2.25), (2.26) e (2.27) são as equações de movimento em um material elástico isotrópico na ausência de forças de volume e de superfície. Estas são utilizadas para deduzirmos as equações para a propagação de dois tipos de ondas elásticas: longitudinal e distorcional.

### 2.1.5 Velocidade de ondas longitudinais

Derivando as equações (2.25) em  $x$ , (2.26) em  $y$  e (2.27) em  $z$  e somando-as, obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \right] = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Distribuindo,

$$\begin{aligned} \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u \right] + \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v \right] \\ + \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w \right] = \rho \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) + \rho \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} \right) + \rho \left( \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Reagrupando de maneira inteligente,

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Delta + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \\
 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

ou,

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Delta + \mu \nabla^2 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) &= \\
 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Substituindo os termos entre parênteses,

$$(\lambda + \mu) \nabla^2 \Delta + \mu \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \tag{2.32}$$

Por isso,

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \tag{2.33}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Delta \tag{2.34}$$

Uma análise dimensional mostra que a unidade do termo  $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$  é de (distancia/tempo)<sup>2</sup>. Essa equação diferencial parcial de segunda ordem representa uma onda viajando na velocidade de

$$V_{long} = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.35}$$

A equação (2.34) é conhecida como a equação de onda longitudinal em um meio infinito e implica na propagação de uma onda de dilatação ( $\Delta$ ) através de um meio com

velocidade  $V_{long}$  (também conhecida por "bulk sound speed"). Expressando as constantes de Lamé em função do módulo de elasticidade e coeficiente de poisson, por

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{E}{[2(1 + \nu)]} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]}\end{aligned}\tag{2.36}$$

Chegamos a:

$$\begin{aligned}V_{long} &= \left( \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \nu = 0.3 \quad \Rightarrow \quad V_{long} &= \left( \frac{1.346E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{2.37}$$

### 2.1.6 Velocidade de ondas de cisalhamento

Para calcularmos a velocidade da onda de cisalhamento, devemos eliminar a dilatação ( $\Delta$ ) das equações (2.25), (2.26) e (2.27). Assim, derivando (2.26) em  $z$  e (2.27) em  $y$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y \partial z} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial z}\tag{2.38}$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z \partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y}\tag{2.39}$$

Subtraindo (2.38) de (2.39),

$$\mu \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)\tag{2.40}$$

Por definição, a rotação de um corpo rígido em  $x$ ,  $w_x$ , é dado por

$$w_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)\tag{2.41}$$

e portanto,

$$\mu \nabla^2 w_x = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_x\tag{2.42}$$

sendo que o mesmo pode ser dito de  $w_y$  e  $w_z$ .

Desta forma, podemos dizer que a rotação  $w_x$  se propaga com velocidade

$$V_{shear} = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{E}{2\rho(1+\nu)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

### 2.1.7 Considerações sobre velocidades de ondas longitudinal e de cisalhamento

Partindo da eq. (2.25), ao dizermos que a dilatação,  $\Delta$  é nula, obtemos:

$$\mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.44)$$

com equações similares em  $y$  e  $z$ .

Para que tenhamos as rotações  $w_x$ ,  $w_y$  e  $w_z$  todas nulas,  $u$ ,  $y$  e  $z$  devem satisfazer as seguintes condições:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{e} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.45)$$

sendo  $\phi$  a função potencial. Além disso, sabemos que

$$\Delta = \nabla^2 \phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \nabla^2 u$$

Substituindo na eq. (2.25), temos:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 u \quad (2.46)$$

com equações similares para  $v$  e  $w$ .

Podemos agora afirmar que uma onda elástica no interior de um meio sólido se propaga com duas velocidades diferentes. Ondas que envolvem rotação nula se propagam com velocidade  $\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ , enquanto ondas envolvendo dilatação nula se propagam com velocidade  $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Podemos chamar esses dois tipos de ondas de irrotacionais ou ondas

de dilatação e equivolumiais ou ondas de distorção ou ainda ondas de cisalhamento, respectivamente. Conforme demonstrado por Kolski em [[15]], iremos provar que uma onda elastica, em um meio isotrópico, viaja com ua ou outra ou ainda ambas as velocidades descritas acima. Considere uma onda propagando-se paralelamente ao eixo  $x$ . Sendo a velocidade de propagação da onda igual a  $c$  e os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  funções de um único parâmetro  $\psi = x - ct$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2}, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} & \text{e} & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

e as derivadas com respeito a  $y$  e  $z$  nulas. Adotando-se  $u''$ ,  $v''$  e  $w''$  para as segundas derivadas de  $u$ ,  $v$  e  $z$  com respeito a  $\psi$  e substituimos na equação de movimento (2.25), obtemos:

$$\rho c^2 u'' = (\lambda + 2\mu)u'', \quad (2.48)$$

similarmente das equações (2.26) e (2.27),obtemos:

$$\rho c^2 v'' = \mu v'' \quad (2.49)$$

$$\rho c^2 w'' = \mu w''. \quad (2.50)$$

As equações (2.48), (2.49) e (2.50) podem ser satisfeitas de dois modos. Um deles é termos  $c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$  e  $v'' = w'' = 0$ .O outro é  $c^2 = \frac{\mu}{\rho}$  e  $u'' = 0$ . No primeiro, temos ondas longitudinais nas quais o movimento das partículas se da na direção da propagação. Na segundo modo, o movimento das partículas é perpendicular a direção de propagação da onda.

### 2.1.8 Ondas de Rayleigh

Em um meio isotrópico infinito, somente dois tipos de ondas podem se propagar. Entretanto, quando há uma superfície limite, existem ondas clásticas de superfície. Rayleigh foi o primeiro a estudar esse tipo de onda, muito semelhante a ondas gravitacionais em superfícies de líquidos.

Considere a propagação de uma onda plana através de um meio elástico com uma superfície limite plana. Tentaremos achar soluções para as equações (2.48), (2.49) e (2.50) que correspondam a um distúrbio confinado, em sua maioria, a uma região próxima a superfície limite, a qual satisfaz a condição de tensões nulas. Para simplificarmos, usaremos o plano  $xy$  como fronteira com o sentido positivo de  $z$  adentrando no sólido, e a onda plana se movimentando na direção  $x$ . Como os deslocamentos serão independentes da coordenada  $y$ , temos:

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} \quad e \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.51)$$

Assim, definimos duas funções potenciais:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad e \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.52)$$

De maneira a termos:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi \\ &= \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (2.53)$$

c

$$\begin{aligned}
 2w_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi \\
 &= \nabla^2 \psi
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

As duas ultimas equações demonstram que  $\phi$  está associado com a dilatação produzida pelo distúrbio, enquanto  $\psi$  está associado com a rotação. Desta forma, estas duas funções potencial permitiram a separação dos efeitos de dilatação e rotação em um meio.

Substituindo (2.52) e (2.53) em (2.48), teremos:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \Delta + \mu \nabla^2 u \\
 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\
 \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi + \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi + \mu \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi \\
 \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi + \mu \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

De forma equivalente, substituindo (2.52) e (2.53) em (2.50), teremos:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \Delta + \mu \nabla^2 w \\
 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi + \mu \nabla^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
 \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi + \mu \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi \\
 \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - \mu \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Derivando (2.55) com relação a  $x$  e (2.56) com relação a  $z$ , obtemos:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \phi + \mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \nabla^2 \psi \tag{2.57}$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \phi - \mu \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \nabla^2 \psi \quad (2.58)$$

Somando (2.57) e (2.58), encontramos:

$$\rho \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla^2 \phi) \quad (2.59)$$

Agora derivando (2.55) com relação a  $z$  e (2.56) com relação a  $x$ , obtemos:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \nabla^2 \phi + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \psi \quad (2.60)$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \nabla^2 \phi - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \psi \quad (2.61)$$

Subtraindo (2.61) de (2.60), encontramos:

$$\rho \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = \mu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \quad (2.62)$$

Desta forma, as equações (2.59) e (2.62) podem ser satisfeitas por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right] \nabla^2 \phi = c_{long}^2 \nabla^2 \phi \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left[ \frac{\mu}{\rho} \right] \nabla^2 \psi = c_{shear}^2 \nabla^2 \psi \quad (2.64)$$

Sejam  $p$  a velocidade angular da onda,  $\Lambda$  o comprimento da onda,  $d$  a frequência da onda, sabemos que:

$$p = 2\pi d \quad c = \Lambda d \quad \Rightarrow \quad f = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{p}{c} \quad (2.65)$$

Se considerar a onda percorrendo o sentido positivo de  $x$ , podemos experimentar para soluções de (2.63) e (2.64):

$$\phi = F(z) e^{i(pt - fx)} \quad (2.66)$$

$$\psi = G(z) e^{i(pt - fx)} \quad (2.67)$$

com  $F$  e  $G$  sendo funções que indicam como a amplitude da onda varia com a variação de  $z$ . Substituindo (2.66) em (2.63), ficamos com:

$$-\frac{p^2}{c_{long}^2}F(z) = -f^2F(z) + F''(z) \quad (2.68)$$

com  $F''(z) = \frac{d^2}{dz^2}$ . Podemos escreve-la ainda como:

$$F''(z) - (f^2 - h^2)F(z) = 0 \quad (2.69)$$

com  $h = \frac{p}{c_{long}}$  e solução

$$F(z) = Ae^{-qz} + A'e^{qz} \quad (2.70)$$

com

$$q^2 = f^2 - h^2 \quad (2.71)$$

O segundo termo da eq. (2.70) corresponde a um distúrbio que tem sua amplitude crescente com a direção positiva de  $z$ , desta forma  $A' = 0$ .

Do mesmo modo, ao substituirmos a expressão de  $\psi$  da eq. (2.67) em (2.64), obtemos:

$$-\kappa^2G(z) = -f^2G(z) + G''(z), \quad \text{com } \kappa = \frac{p}{c_{shear}} \quad (2.72)$$

e solução relevante

$$G(z) = Be^{-sz} \quad (2.73)$$

com

$$s^2 = f^2 - \kappa^2 \quad (2.74)$$

Então, as eq. (2.66) e (2.67) se tornam:

$$\phi = Ae^{[-qz+i(pt-fx)]} \quad (2.75)$$

$$\psi = B e^{[-sz+i(pt-fx)]} \quad (2.76)$$

Vamos escrever agora as equações das condições de contorno em função de  $\phi$  e  $\psi$ . As componentes de tensão  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zy}$  e  $\sigma_{zx}$  devem ser nulas em  $z = 0$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \\ &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Substituindo (2.75) e (2.76) em (2.77),

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) (A q^2 e^{[-qz+i(pt-fx)]}) + \lambda (A i^2 f^2 e^{[-qz+i(pt-fx)]}) - 2\mu (B s i f e^{[-sz+i(pt-fx)]}) \quad (2.78)$$

Sabendo-se que para  $z = 0$  temos  $\sigma_{zz} = 0$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) (A q^2 e^{[-q0+i(pt-fx)]}) + \lambda (A i^2 f^2 e^{[-q0+i(pt-fx)]}) - 2\mu (B s i f e^{[-s0+i(pt-fx)]}) &= 0 \\ A[(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda f^2] - B(2\mu s i f) &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Similarmente para  $\sigma_{zx}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] \\ &= \mu \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \\ &= \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

Substituindo (2.75) e (2.76) em (2.80),

$$\sigma_{zx} = \mu \left[ 2 (A q i f e^{[-qz+i(pt-fx)]}) - B i^2 f^2 e^{[-sz+i(pt-fx)]} + B s^2 e^{[-sz+i(pt-fx)]} \right] \quad (2.81)$$

Sabendo-se que para  $z = 0$  temos  $\sigma_{zx} = 0$

$$= \mu [2 (Aqif e^{[-q0+i(pt-fx)]} - Bi^2 f^2 e^{[-s0+i(pt-fx)]} + Bs^2 e^{[-s0+i(pt-fx)]})] 0 \quad (2.82)$$

$$A(2qif) + B(f^2 + s^2) = 0$$

Isolando  $\frac{A}{B}$  nas eq. (2.79) e (2.82) e igualando-os

$$\frac{2\mu sif}{(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda f^2} = -\frac{s^2 + f^2}{2iqf} \quad (2.83)$$

$$4\mu sqf^2 = [(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda f^2] (s^2 + f^2)$$

elevando ambos os lados ao quadrado e substituindo  $s$  e  $q$  de (2.71) e (2.74) respectivamente,

$$16\mu^2 (f^2 - \kappa^2) (f^2 - h^2) f^4 = [(\lambda + 2\mu) (f^2 - h^2) - \lambda f^2]^2 (f^2 - \kappa^2 + f^2)^2 \quad (2.84)$$

$$16\mu^2 (f^2 - \kappa^2) (f^2 - h^2) f^4 = [-(\lambda + 2\mu) h^2 + 2\mu f^2]^2 (2f^2 - \kappa^2)^2$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $\mu^2 f^8$

$$16 \left(1 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right) \left(1 - \frac{h^2}{f^2}\right) = \left[2 - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\right) \frac{h^2}{f^2}\right]^2 \left(2 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right)^2 \quad (2.85)$$

Como definido anteriormente,

$$h = \frac{p}{c_{long}} \quad e \quad \kappa = \frac{p}{c_{shear}} \quad (2.86)$$

de modo que  $\frac{h^2}{\kappa^2} = \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)}$  que pode ser expressa puramente através do módulo de Poisson  $\nu$ , ou seja:

$$\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} = \alpha_1^2$$

então  $h = \alpha_1 \kappa$ .

Substituindo  $h$  e  $\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$  em (2.85)

$$16 \left(1 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right) \left(1 - \alpha_1^2 \frac{\kappa^2}{f^2}\right) = \left(2 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right)^4 \quad (2.87)$$

que por fim pode ser simplificada ainda mais chamando  $\frac{\kappa}{f}$  de  $\kappa_1$ , encontrando a seguinte equação cúbica em  $\kappa^2$

$$\kappa_1^6 - 8\kappa_1^4 + (24 - 16\alpha_1^2)\kappa_1^2 + (16\alpha_1^2 - 16) = 0 \quad (2.88)$$

Uma solução aproximada foi descrita por Meyers [20] da seguinte maneira:

$$V_{Rayleigh} = \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} V_{shear} \quad (2.89)$$

## 2.2 Ondas elásticas em meios finitos

As equações de propagação de ondas de tensão em qualquer corpo solido podem ser encontradas aplicando-se as condições de contorno apropriadas as equações (2.48), (2.49) e (2.50). Entretanto, quando há muitas superfícies livres, o problema se torna complexo e, em muitos casos, não possui solução exata.

### 2.2.1 Ondas longitudinais em barras cilíndricas finas

Como todo problema físico, existe uma equação diferencial governante, que rege a interação comportamental das variáveis presentes no problema. Na equação governante da barra cilíndrica, deve-se relacionar como o deslocamento  $u$  se comporta com relação a posição  $x$  e do instante de tempo  $t$ .

Para a dedução a seguir, estão feitas as seguintes suposições:

1. Barra prismática;
2. Homogeneidade do material;
3. Uma secções planas e paralelas permanecem planas e paralelas;

4. Tensão uniaxial;

Embora por suposição a tensão seja uniaxial, nada foi dito no sentido de que a deformação seja uniaxial. Por causa do efeito de Poisson, expansões e contrações radiais são resultados da tensão axial. Essa inércia lateral será re-estudada adiante, pois é a causa do efeito conhecido como dispersão.

Considere a figura (2.2):

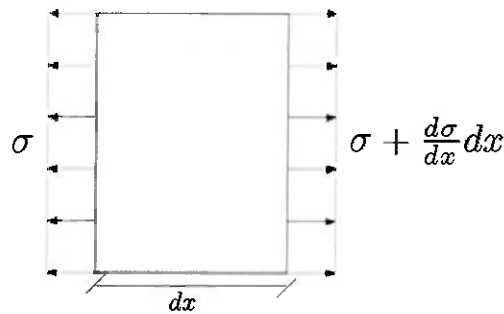


Figura 2.2: Elemento diferencial da barra cilíndrica

Sendo  $x$  a coordenada da secção transversal,  $u(x, t)$  o deslocamento longitudinal da secção. Presumindo que a barra cilíndrica esteja sobre uma variação dinâmica de tensão,  $\sigma(x, t)$ , para que as secções adjacentes estejam sob tensões diferentes, é possível escrever:

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) A = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.90)$$

na qual  $A$  é a área da secção transversal.

A equação (2.90) pode ser reduzida a:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.91)$$

Como ainda não foram introduzidas características de materiais, a equação governante serve para problemas elásticos e não elásticos. Presumindo que o material é elástico e obedece a lei de Hooke, temos:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.92)$$

com  $E$  e  $\varepsilon$  representando o módulo de elasticidade e a deformação axial respectivamente. Entretanto é sabido que:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.93)$$

Substituindo (2.93) e (2.92) em (2.91), obtém-se:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.94)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{com } V_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.95)$$

### 2.2.2 Características da propagação de ondas

A solução da equação diferencial (2.95) é da forma:

$$u(x, t) = f(V_0 t - x) + F(V_0 t + x) \quad (2.96)$$

Com a função  $f$  correspondente a onda se propagando na direção positiva do eixo  $x$ , enquanto a função  $F$  corresponde a onda se propagando na direção negativa de  $x$ .  $V_0$  é a velocidade de propagação longitudinal da onda na barra cilíndrica sem considerar a dispersão. A velocidade  $V_0$  é freqüentemente designada de velocidade de barra, para nos ser confundida com outras velocidades de propagação.

A tabela (2.1)(retirada de [10]) de mostra alguns dos valores de  $V_0$ .

Vamos considerar as consequências da equação (2.96), a qual pode ser aplicada a propagação de ondas elásticas cujo comprimento de onda é muito maior que o diâmetro

Tabela 2.1: Velocidade de barra para alguns materiais

Material	Velocidade de barra ( $m \cdot s^{-1} \cdot 10^{-3}$ )
Aço	5.06
Alumínio	5.23
Bronze	3.13
Cádmio	2.39
Cobre	3.58
Ferro	5.18
Magnésio	4.9
Níquel	4.75
Ouro	2.03
Prata	2.64
Tungstênio	4.29
Zinco	3.81

da barra. Por simplificação, iremos apenas considerar a propagação no sentido negativo de  $x$ , de forma a termos:

$$u = f(V_0 t + x) \quad (2.97)$$

Derivando ambos os lados em função de  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(V_0 t + x) \quad (2.98)$$

com  $f'$  indicando a diferenciação com respeito ao argumento ( $V_0 t + x$ ).

De maneira similar, derivando ambos os lados de (2.97) com respeito a  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 f'(V_0 t + x) \quad (2.99)$$

De (2.98) e (2.99), temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.100)$$

Sabendo-se que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  é igual a  $\frac{\sigma_{xx}}{E}$ , obteremos

$$\sigma_{xx} = \left( \frac{E}{V_0} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{E}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = (\sqrt{E\rho}) \frac{\partial u}{\partial t} = (\rho V_0) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.101)$$

A eq. (2.101) mostra que há uma relação linear entre a tensão em qualquer ponto e a velocidade da partícula, sendo proporcionais através do termo  $\rho V_0$ , chamado de impedância característica. Esta pode ter com unidade 'ohms acústicos', devida a semelhança com a Lei de Ohm.

Se a velocidade de propagação da onda  $V_0$  for independente das componentes de frequência presentes na onda de tensão, as componentes da Transformada de Fourier da onda de tensão terão comprimentos de onda muito superiores ao diâmetro da barra e então a onda de tensão se propagará sem dispersão.

Quando este pulso atinge a extremidade livre da barra, ele será refletido. Para descobrirmos como este pulso será refletido, basta aplicarmos as condições de contorno de tensão normal nula na extremidade da barra. Se considerarmos o deslocamento devido ao pulso incidente como

$$u_1 = F(V_0 t + x) \quad (2.102)$$

e o deslocamento devido ao pulso refletido como

$$u_2 = f(V_0 t - x) \quad (2.103)$$

e as tensões geradas por ambos os pulso

$$E \frac{\partial u_1}{\partial x} - E \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (2.104)$$

Desta forma, como tensão final teremos:

$$E \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = E \left[ F' (V_0 t + x) - f' (V_0 t - x) \right] \quad (2.105)$$

E com a condição de tensão normal nula em  $x = 0$ , teremos como condição

$$F' (V_0 t) - f' (V_0 t) = 0 \quad (2.106)$$

Sabemos que o formato do pulso de pressão refletido é o mesmo do pulso incidente, mas com sinal oposto. Assim, um pulso de compressão será refletido como um pulso similar de tração. Desta forma, o deslocamento em qualquer ponto da barra, dado por  $u_1 + u_2$ , será  $2F(V_0 t)$  na extremidade livre da mesma, já que  $x = 0$  nesta posição. Como o deslocamento, as velocidades das partículas nesta extremidade também serão o dobro da velocidade nos outros pontos da barra.

Já quando um pulso é refletido em uma extremidade fixa da barra, temos por condição de contorno impor deslocamento nulo. Neste caso, de (2.102) e (2.103)

$$u_1 + u_2 = F(V_0 t + x) + f(V_0 - x) \quad (2.107)$$

e portanto em  $x = 0$

$$F(V_0 t) = -f(V_0) \quad (2.108)$$

ou seja, o deslocamento causado pelo pulso de pressão incidente é de mesma amplitude e sinal oposto ao causado pelo pulso refletido. As tensões causadas por ambos os pulsos,  $E \frac{\partial u_1}{\partial x}$  e  $E \frac{\partial u_2}{\partial x}$ , são iguais. Desta forma, um pulso de pressão é refletido sem modificações em uma extremidade fixa, uma vez que as direções do deslocamentos e as direções de propagação são ambas invertidas. Pode-se afirmar, então, que a tensão nesta extremidade fixa é o dobro da gerada pelo pulso de pressão em outro ponto da barra.

Como ilustração da teoria de reflexão em barras brevemente explica, analisaremos o movimento de uma barra  $AC$  livre suspensa. Há uma pressão  $P$  atuando na extremidade  $C$  em um pequeno intervalo de tempo  $dt$ . Se a massa da barra for  $M$  e a velocidade do centro de massa for  $V$ , por conservação da quantidade de movimento, temos que  $MV = P dt$ . No instante em que a força é removida, um comprimento  $V_0 dt$  da barra estará em compressão enquanto o restante estará em repouso e indeformado. O pulso de tensão irá permanecer com o mesmo comprimento e percorrerá a barra com velocidade  $V_0$ . Da eq. (2.101), pode-se verificar que a velocidade da partícula é  $\frac{P}{A\rho V_0}$ . Assim, para que o momento seja constante e igual a  $P dt$ , a massa viajando a esta velocidade é de  $\rho AV_0 dt$ . Quando o pulso atinge a face  $A$ , é refletido como um pulso de tração que também viaja com velocidade  $V_0$ . Este por sua vez é refletido na extremidade  $C$  e o ciclo se repete. O pulso irá percorrer uma barra de comprimento  $L$  em um tempo  $\frac{L}{V_0}$  e a fig. (2.3) ilustra o movimento da mesma para  $dt < 2\frac{L}{V_0}$ , após a retirada da força. As curvas  $A$  e  $B$  indicam a posição no tempo das extremidades. A curva  $C$  indica a posição no tempo do ponto médio que é deslocado duas vezes a cada  $\frac{L}{V_0}$ , já que o pulso passa duas vezes por este ponto até se refletir novamente em uma das duas extremidades. A curva  $D$  descreve a posição do centro de gravidade da barra, que é uma parábola durante o tempo de aplicação da força  $dt$  e uma reta depois.

A velocidade do centro de massa é sempre positiva pois tanto o movimento do pulso de compressão para a frente ou o do pulso de tração para trás implicam no movimento do centro de gravidade para a frente. Pode-se notar que para cada ciclo de  $2\frac{L}{V_0}$ , as posições do ponto médio e do centro de gravidade coincidem quatro vezes. Duas dessas ocasiões são quando o pulso está passando pelo ponto médio da barra. As outras duas são quando apenas metade do pulso se refletiu em uma das extremidades. Na prática, o pulso irá crescer continuamente conforme se propaga na barra. Isso ocorre devido a

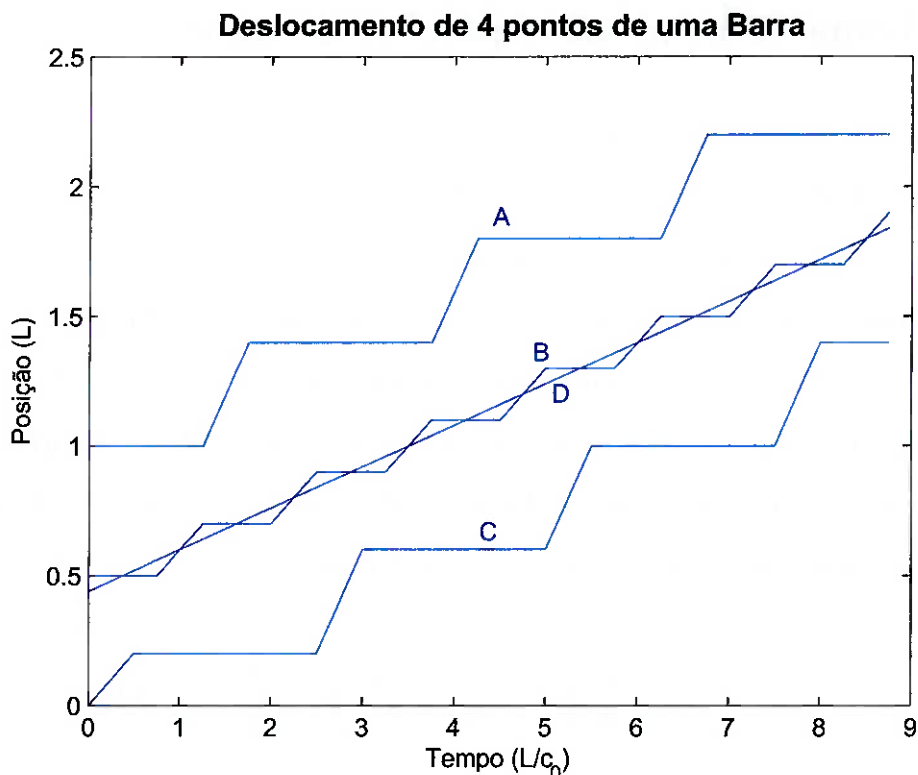


Figura 2.3: Posição no tempo demonstrando o movimento descontínuo produzido por repetidas reflexões de um pulso de pressões longitudinais. Movimento de (A) na face da frente da barra, (B) no ponto médio, (C) na face de trás, (D) no centro de gravidade. As deformações foram exageradas no sentido de facilitar a compreensão do fenômeno

dispersão produzida pela inércia e movimento lateral na barra e também pelo atrito interno. Segundo Kolsky [15] os patamares iriam conseqüentemente se tornar arredondados e eventualmente a largura do pulso aumentaria o suficiente para tornar maior que o comprimento da barra. O problema então pode ser melhor considerado como um movimento de velocidade constante da barra inteira com, ao mesmo tempo, oscilações longitudinais em torno do centro de gravidade. As oscilações sofreriam um decaimento logarítmico, tornando o problema apenas de movimento de corpo rígido com o passar do tempo.

## 2.3 Forma vetorial das equações de onda

As equações de movimento podem ser expressas em forma vetorial. Uma das vantagens desse tipo de representação é que, neste formato, independem do sistema de coordenadas. Assim, expressá-las em qualquer sistema de coordenadas se torna simples.

Se o deslocamento for denotado por um vetor  $\mathbf{s}$ , as componentes dele por  $(u, v, w)$  em um sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , a dilatação  $\Delta$  de magnitude  $\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$  é igual ao divergente de  $\mathbf{s}$ , escrito  $\text{div } \mathbf{s}$ . A rotação é um vetor, escrito em notação vetorial como  $\frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{s}$ , de componentes, em coordenadas cartesianas,  $w_x$ ,  $w_y$  e  $w_z$ . Se  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  forem os versores ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, temos:

$$\text{curl } \mathbf{s} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.109)$$

Outra função que deve ser definida é a gradiente. Este é um vetor de componentes proporcionais a taxa de variação das derivadas de uma quantidade escalar. Se  $V$  é uma quantidade escalar e é função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , temos

$$\text{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.110)$$

Podemos então aplicar o operador de Laplace  $\nabla^2$  em um vetor sde forma a obtermos

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \nabla^2 u \mathbf{i} + \nabla^2 v \mathbf{j} + \nabla^2 w \mathbf{k} \quad (2.111)$$

com  $\nabla^2 u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$  de modo a podermos escrever

$$\nabla^2 \mathbf{s} = \text{grad div } \mathbf{s} - \text{curl curl } \mathbf{s} \quad (2.112)$$

Finalmente podemos escrever as equações de movimento (2.25), (2.26) e (2.27) como uma única equação vetorial

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{s} + \mu \nabla^2 \mathbf{s} \quad (2.113)$$

Substituindo  $\nabla^2 \mathbf{s}$  como descrito em (2.112),

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{s} - \mu \text{curl curl } \mathbf{s} \quad (2.114)$$

Se escrevermos a equação (2.114) em termos da quantidade escalar  $\Delta$  ( $= \text{div } \mathbf{s}$ ) e da quantidade vorial  $\omega$  ( $= \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{s}$ ), teremos

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad } \Delta - 2\mu \text{curl } \omega \quad (2.115)$$

## 2.4 Mudando para sistemas de coordenadas curvos

Embora as coordenadas cartesianas são convenientes para muitos problemas, não raramente é conveniente transformar as equações para um outro sistemas de coordenadas mais conveniente. Um exemplo disto seria aplicar as condições de contorno de superfície livre em uma barra cilíndrica nas equações de movimento.

Em geral, se  $(q_1, q_2, q_3)$  são as coordenadas de um ponto em um sistema de coordenadas e  $(x, y, z)$  são coordenadas cartesianas,  $x$ ,  $y$  e  $z$  serão funções de  $q_1, q_2$  e  $q_3$ , de modo a  $x = x(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y = y(q_1, q_2, q_3)$  e  $z = z(q_1, q_2, q_3)$  e

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \quad (2.116)$$

Para um elemento de comprimento  $dl$ , teremos:

$$dl = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.117)$$

$$dx^2 = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} dq_1^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} dq_2^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_3^2} dq_3^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} dq_1 dq_2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_3} dq_2 dq_3 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial q_3 \partial q_1} dq_3 dq_1 \quad (2.118)$$

$$dy^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} dq_1^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_2^2} dq_2^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_3^2} dq_3^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} dq_1 dq_2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial q_2 \partial q_3} dq_2 dq_3 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial q_3 \partial q_1} dq_3 dq_1 \quad (2.119)$$

$$dz^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} dq_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} dq_2^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial q_3^2} dq_3^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2} dq_1 dq_2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial q_2 \partial q_3} dq_2 dq_3 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial q_3 \partial q_1} dq_3 dq_1 \quad (2.120)$$

Resultando em

$$dl^2 = g_{11} dq_1^2 + g_{22} dq_2^2 + g_{33} dq_3^2 + 2g_{23} dq_2 dq_3 + 2g_{31} dq_3 dq_1 + 2g_{12} dq_1 dq_2 \quad (2.121)$$

$$\text{com } g_{ij} = g_{ji} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 y}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 z}{\partial q_i \partial q_j}.$$

Considerando o comprimento  $dl_1$  que corresponde a variação de  $q_1$  a  $q_1 + dq_1$  com  $q_2$  e  $q_3$  constantes, teremos  $dl_1 = \sqrt{g_{11}} dq_1$ . De maneira análoga,  $dl_2 = \sqrt{g_{22}} dq_2$  e  $dl_3 = \sqrt{g_{33}} dq_3$ . Adotaremos  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  para  $\sqrt{g_{11}}$ ,  $\sqrt{g_{22}}$  e  $\sqrt{g_{33}}$ , respectivamente. Se as superfícies  $q_1 = \text{constante}$ ,  $q_2 = \text{constante}$  e  $q_3 = \text{constante}$  sempre se intersectam formando ângulos retos, podemos considerar um elemento de volume  $dV$  como:

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (2.122)$$

Considerando um vetor função  $\mathbf{F}$  que tenha componentes  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  e  $\mathbf{F}_3$  nas direções dos eixos de um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais e sejam  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  os versores nestes eixos de modo a:

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{a} + F_2 \mathbf{b} + F_3 \mathbf{c} \quad (2.123)$$

As funções desse vetor podem ser expressas em função dos termos  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ . O divergente então pode ser escrito por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \right] \quad (2.124)$$

Também temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{F} &= \frac{\mathbf{a}}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 F_2) \right] \\ &+ \frac{\mathbf{b}}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 F_3) \right] \\ &+ \frac{\mathbf{c}}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 F_1) \right] \end{aligned} \quad (2.125)$$

E por último,

$$\operatorname{grad} V = \frac{\mathbf{a}}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{b}}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{c}}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \quad (2.126)$$

Para transformarmos (2.124), (2.125) e (2.126) em um determinado sistema de coordenadas, devemos encontrar  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  correspondentes. Usaremos um sistema de coordenadas cilíndricas com  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ , sendo  $dl_1 = dr$ ,  $dl_2 = r d\theta$  e  $dl_3 = dz$ , resultando em  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$  e  $h_3 = 1$ .

## 2.5 Equações de movimento em coordenadas cilíndricas

Se usarmos as coordenadas cilíndricas, com  $r$ ,  $\theta$  e  $z$  e deslocamentos correspondentes  $u_r$ ,  $u_\theta$  e  $u_z$ , temos como equações de movimento:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \quad (2.127)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial w_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial w_z}{\partial r} \quad (2.128)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \quad (2.129)$$

com a dilatação nestas coordenadas sendo

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.130)$$

e as componentes de rotação  $w_r$ ,  $w_\theta$  e  $w_z$ , nas direções do vetor raio  $r$ , perpendicular ao plano  $rz$  e paralelo ao eixo  $z$ , definidas por

$$\begin{cases} 2w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 2w_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 2w_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (2.131)$$

Multiplicando a primeira equação por  $r$  e derivando em função de  $r$ , derivando a segunda equação em função de  $\theta$  e, na terceira equação, passando  $r$  multiplicando o lado direito e derivando-a em função de  $z$ , obtemos:

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial(rw_r)}{\partial r} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r \partial z} \\ 2 \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial r} \\ 2 \frac{\partial(rw_z)}{\partial z} = \frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} \end{cases} \quad (2.132)$$

e somando as 3 equações e multiplicando por  $\frac{1}{2r}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(w_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.133)$$

## 2.6 Equações de Pocchammer-Chree para barras cilíndricas

Como mencionado anteriormente, é possível resolver qualquer problema de vibração ou propagação de ondas de tensão em um meio elástico inserindo as condições de contorno corretas nas equações de movimento (2.25), (2.26) e (2.27). Entretanto, por causa da

grande complexidade das equações diferenciais em que se tornaram as equações de movimento após inserção das condições de contorno, ainda não foi possível achar a solução exata para cilindros de comprimento finito em vibração axial. Soluções muito próximas da solução exata foram descobertas, desde que o comprimento do cilindro seja muito superior ao diâmetro do mesmo. Pocchhammer, em [23] foi o primeiro a investigar este problema em termos de equações elásticas. Chree, de maneira independente, alcançou os mesmos resultados em [4]. Love estudou e analisou as idéias de Pocchhammer em [18].

É extremamente complicado inserir as condições de contorno nas equações de movimento escritas em coordenadas cartesianas (2.25), (2.26) e (2.27), sendo reescreve-las em coordenadas cilíndricas. Esse procedimento foi previamente explicado, no qual usamos as variáveis  $r$ ,  $\theta$  e  $z$  e deslocamentos correspondentes  $u_r$ ,  $u_\theta$  e  $u_z$ .

No caso do cilindro, temos como condições de contorno tensões radiais nulas. Desta forma,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta r}$  e  $\sigma_{zr}$  são nulos. Estas três tensões podem ser descritas por:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta r} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \\ \sigma_{zr} = \mu \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \end{cases} \quad (2.134)$$

Se considerarmos a propagação de um pulso de infinitas ondas senoidais ao longo do cilindro sólido de forma a termos o deslocamento em cada ponto como uma função harmônica em  $z$  e  $t$ , teremos:

$$\begin{cases} u_r = U e^{i(\gamma z + pt)} \\ u_\theta = V e^{i(\gamma z + pt)} \\ u_z = W e^{i(\gamma z + pt)} \end{cases} \quad (2.135)$$

com  $U$ ,  $V$  e  $W$  sendo funções de  $R$  e  $\theta$ , sendo a frequência da onda  $\frac{p}{2\pi}$  e o comprimento de onda  $\frac{2\pi}{\gamma}$ . A velocidade da onda é, então,  $\frac{p}{\gamma}$ . Substituindo (2.135) nas equações (2.127),

(2.128) e (2.129) e inserindo as condições de contorno das três componentes de tensão descritas em (2.134), podemos obter a velocidade de fase para uma dada frequência.

### 2.6.1 Equações de Pocchhammer-Chree para ondas longitudinais em cilindros

Assumindo o deslocamento  $u_\theta$  nulo, pois a movimentação é simétrica ao redor do eixo do cilindro, tornamos  $U$  e  $W$  independentes de  $\theta$ . Também podemos dizer que, de (2.131),  $w_r$  e  $w_z$  também são nulas. Então, (2.127), (2.128) se tornam:

$$-\rho p^2 u_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + i2\mu\gamma w_\theta \quad (2.136)$$

$$-\rho p^2 u_z = i(\lambda + 2\mu)\gamma\Delta - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) \quad (2.137)$$

já que de (2.135) temos que  $\frac{\partial u_r}{\partial t} = ipu_r$ ,  $\frac{\partial u_r}{\partial z} = i\gamma u_r$  e similares para  $\frac{\partial u_r}{\partial t}$  e  $\frac{\partial u_r}{\partial z}$ .

Temos por objetivo achar equações que dependam somente de  $\Delta$  ou  $w_\theta$ .

Multiplicando (2.136) por  $r$

$$-\rho p^2 r u_r = (\lambda + 2\mu) r \frac{\partial \Delta}{\partial r} + i2\mu\gamma r w_\theta \quad (2.138)$$

Derivando em  $r$

$$-\rho p^2 \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + i2\mu\gamma \frac{\partial(r w_\theta)}{\partial r} \quad (2.139)$$

mas, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) = \frac{\partial \Delta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} \quad (2.140)$$

obtendo então,

$$-\rho p^2 \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \left( r \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + i2\mu\gamma \frac{\partial(r w_\theta)}{\partial r} \quad (2.141)$$

e dividindo por  $r$

$$-\rho p^2 \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + i \frac{2\mu\gamma}{r} \frac{\partial(rw_\theta)}{\partial r} \quad (2.142)$$

Sabendo-se que, de (2.135),  $\frac{\partial u_z}{\partial z} = i\gamma u_z$  e portanto  $u_z = \frac{\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)}{i\gamma}$ , temos de (2.137),

$$-\rho p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(\lambda + 2\mu) \gamma^2 \Delta - i \frac{2\mu\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw_\theta) \quad (2.143)$$

Somando-se (2.142) e (2.143),

$$-\rho p^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \gamma^2 \Delta \quad (2.144)$$

Substituindo-se por  $\Delta$  o valor dos termos entre parênteses do lado esquerdo da igualdade de acordo com (2.130), chegamos a:

$$-\rho p^2 \Delta = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \gamma^2 \Delta \right) \quad (2.145)$$

e por fim

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + h' \Delta = 0 \quad \text{com} \quad h' = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu} - \gamma^2 \quad (2.146)$$

Agora só resta descobrirmos uma equação que dependa apenas de  $w_\theta$ . Com essa intenção, conhecendo a relação  $u_r = \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{1}{\gamma i}$ , podemos reescrever (2.136) como

$$-\rho p^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{1}{\gamma i} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + i 2\mu \gamma w_\theta \quad (2.147)$$

ou

$$\rho p^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} = -i(\lambda + 2\mu) \gamma \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu \gamma^2 w_\theta \quad (2.148)$$

Derivando (2.137) com relação a  $r$ ,

$$-\rho p^2 \frac{\partial u_z}{r} = i(\lambda + 2\mu) \gamma \frac{\partial \Delta}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) \right) \quad (2.149)$$

Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) &= 1 w_\theta + r \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) = \frac{2\mu w_\theta}{r} + 2\mu \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_\theta) \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2\mu w_\theta}{r} + 2\mu \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right) = -\frac{2\mu w_\theta}{r^2} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (2.150)$$

Substituindo em (2.149),

$$-\rho p^2 \frac{\partial u_z}{r} = i(\lambda + 2\mu) \gamma \frac{\partial \Delta}{r} - \left( -\frac{2\mu w_\theta}{r^2} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2} \right) \quad (2.151)$$

Somando com (2.148),

$$\rho p^2 \left( \frac{\partial u_z}{r} - \frac{\partial u_z}{r} \right) = \frac{2\mu w_\theta}{r^2} + 2\mu \gamma^2 w_\theta - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial r} - 2\mu \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2} \quad (2.152)$$

Chegando finalmente em:

$$\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r^2} + \kappa' w_\theta = 0 \quad \text{com} \quad \kappa' = \frac{\rho p^2}{\mu} - \gamma^2 \quad (2.153)$$

Se trocarmos a variável em (2.146) de  $r$  para  $h'r$  e em (2.153) de  $r$  para  $\kappa'r$ , obteremos as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial (h'r)^2} + \frac{1}{(h'r)} \frac{\partial \Delta}{\partial (h'r)} + \Delta = 0 \quad (2.154)$$

$$\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial (\kappa'r)^2} + \frac{1}{(\kappa'r)} \frac{\partial w_\theta}{\partial (\kappa'r)} - \frac{w_\theta}{(\kappa'r)^2} + w_\theta = 0 \quad (2.155)$$

A equação de Bessel possui o seguinte formato

$$\frac{d^2 b}{dm^2} + \frac{1}{m} \frac{db}{dm} + \left( 1 - \frac{d^2}{m^2} \right) b = 0 \quad (2.156)$$

e tem solução  $J_d(m)$ .

Desta forma, podemos dizer que

$$\Delta = GJ_0(h'r) \quad (2.157)$$

e

$$w_\theta = HJ_1(\kappa'r) \quad (2.158)$$

com  $G$  e  $H$  funções de  $z$  e  $t$ , mas independentes de  $r$ .

Agora substituindo  $u_r$  e  $u_t$  de (2.135) em (2.130) e (2.131), temos

$$\Delta = \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + i\gamma W \right) e^{[i(\gamma z + pt)]} \quad (2.159)$$

$$2w_\theta = \left( i\gamma U - \frac{\partial W}{\partial r} \right) e^{[i(\gamma z + pt)]} \quad (2.160)$$

com  $A$  e  $C$  sendo constantes.

Para satisfazer (2.157), (2.158), (2.159) e (2.160),  $U$  e  $W$  devem ter os seguintes formatos:

$$U = A \frac{\partial}{\partial r} J_0(h'r) + C\gamma J_1(\kappa'r) \quad (2.161)$$

$$W = Ai\gamma J_0(h'r) + \frac{Ci}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rJ_1(\kappa'r)] \quad (2.162)$$

Substituindo (2.161) e (2.162) em (2.135) e depois inserindo (2.135) nas equações de Condição de Contorno de  $\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{rz}$  dadas por (2.134), obtemos:

$$\begin{cases} A \left[ 2\mu \frac{\partial^2}{\partial a^2} J_0(h'a) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p^2 \rho J_0(h'a) \right] + 2C\mu\gamma \frac{\partial}{\partial a} J_1(\kappa'a) = 0 \\ 2A\gamma \frac{\partial}{\partial a} J_0(h'a) + C \left( 2\gamma^2 - \frac{p^2\rho}{\mu} \right) J_1(\kappa'a) \end{cases} \quad (2.163)$$

(com  $\frac{\partial}{\partial a}$  significando  $\left[ \frac{\partial}{\partial r} \right]_{r=a}$ ). Ao isolarmos  $\frac{A}{C}$  de cada uma das equações de (2.163) e igualarmos ambos, obtemos a *Equação de Freqüências* ou *Equação de Pocchammer-Chree*, dependente apenas da frequência e comprimento da onda, raio do cilindro  $a$ ,

constantes elásticas  $\mu$  e  $\lambda$  e da densidade  $\rho$ . Essa solução não são exatas para cilindros de comprimento finito, já que não utilizamos a condição de contorno de tensão nula na extremidade da barra. Entretanto, se o comprimento do cilindro for muito maior que o raio  $a$ , a tensão residual se torna muito pequena e desprezível.

Podemos expandir  $J_0(h'a)$  e  $J_1(\kappa'a)$  como séries de potência do seguinte modo:

$$J_0(h'a) = 1 - \frac{1}{4} (h'a)^2 + \frac{1}{64} (h'a)^4 - \dots \quad (2.164)$$

$$J_1(\kappa'a) = \frac{1}{2} (\kappa'a) - \frac{1}{16} (\kappa'a)^3 + \dots \quad (2.165)$$

Se o raio do cilindro for suficientemente pequeno para termos tanto  $h'a$  quanto  $\kappa'a$  menores que a unidade, podemos aproximar a Equação de Frequência desprezando as potências maiores que um de  $h'a$  e  $\kappa'a$ , usando

$$\begin{aligned} J_0(h'a) &= 1 \\ \frac{\partial J_0(h'a)}{\partial a} &= -\frac{1}{2} h'^2 a \\ \frac{\partial^2 J_0(h'a)}{\partial a^2} &= -\frac{1}{2} h'^2 \\ J_1(\kappa'a) &= \frac{\kappa'^2 a}{2} \\ \frac{\partial J_1(\kappa'a)}{\partial a} &= \frac{\kappa'^2}{2} \end{aligned} \quad (2.166)$$

Substituindo todas na Equação de Frequências, teremos

$$(2\gamma^2 - p\rho^2)\kappa'a \left( h'^2 + \frac{\lambda p^2 \rho}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right) = 2\gamma^2 \kappa'a \quad (2.167)$$

Desprezando a solução  $\kappa' = 0$ , que corresponde a velocidade  $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ , substituindo  $h'$  de (2.146)

$$\frac{p^2}{\gamma^2} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\rho} \quad (2.168)$$

Mas, expressando em função do modulo de Elasticidade da equação (2.15), temos:

$$\frac{p^2}{\gamma^2} = \frac{E}{\rho} \quad (2.169)$$

Levando em conta as potências quadráticas de  $a$  da expansão em série da função de Bessel, alcançamos

$$\frac{p}{\gamma} = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4}\nu^2\gamma^2 a^2\right) \quad (2.170)$$

com  $\nu$  sendo o coeficiente de Poisson.

Rayleigh, em [25], através de considerações energéticas associadas ao movimento lateral da barra, chegou nesta mesma equação, só que adimensionalizada, sendo ela:

$$\frac{V_p}{V_0} = 1 - \nu^2\pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2 \quad (2.171)$$

na qual  $c_p = \frac{p}{\gamma}$  é a velocidade de fase,  $V_0 = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$  é a velocidade de onda em um cilindro desconsiderando a distorção e  $\Lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$  o comprimento de onda. A equação mostra que a velocidade de fase decresce com a diminuição do comprimento de onda de maneira a se tornar nula em um comprimento de onda de  $\nu\pi a$ . Desta forma, esta equação é cada vez mais confiável quanto maior o comprimento de onda com relação ao raio do cilindro.

Um conceito importante é o de *Velocidade de Grupo*,  $c_g$ , que é a velocidade na qual a energia é transmitida. Ela é definida, segundo Kolsky [15] como a velocidade na qual cada pacote de ondas é propagado, com os comprimentos de onda das ondas que compõem o pacote estando próximas de  $\Lambda$ . Desta forma, a relação entre

$$V_g = V_p - \Lambda \frac{dc}{d\Lambda} \quad (2.172)$$

Aplicando o conceito de velocidade de grupo, da aproximação de Rayleigh, obtemos

$$\frac{V_g}{V_0} = 1 - \nu^2\pi^2 \left(\frac{a}{\Lambda}\right)^2 \quad (2.173)$$

## 2.7 Comparação entre velocidades dos tipos de onda

Um modo simples de compreender as diferenças entre as velocidades dos diversos tipos de ondas encontrados até agora seria examiná-los em um gráfico. Deste modo, o gráfico (2.4) foi construído demonstrando diversas velocidades de onda e suas variações de acordo com o comprimento de onda.

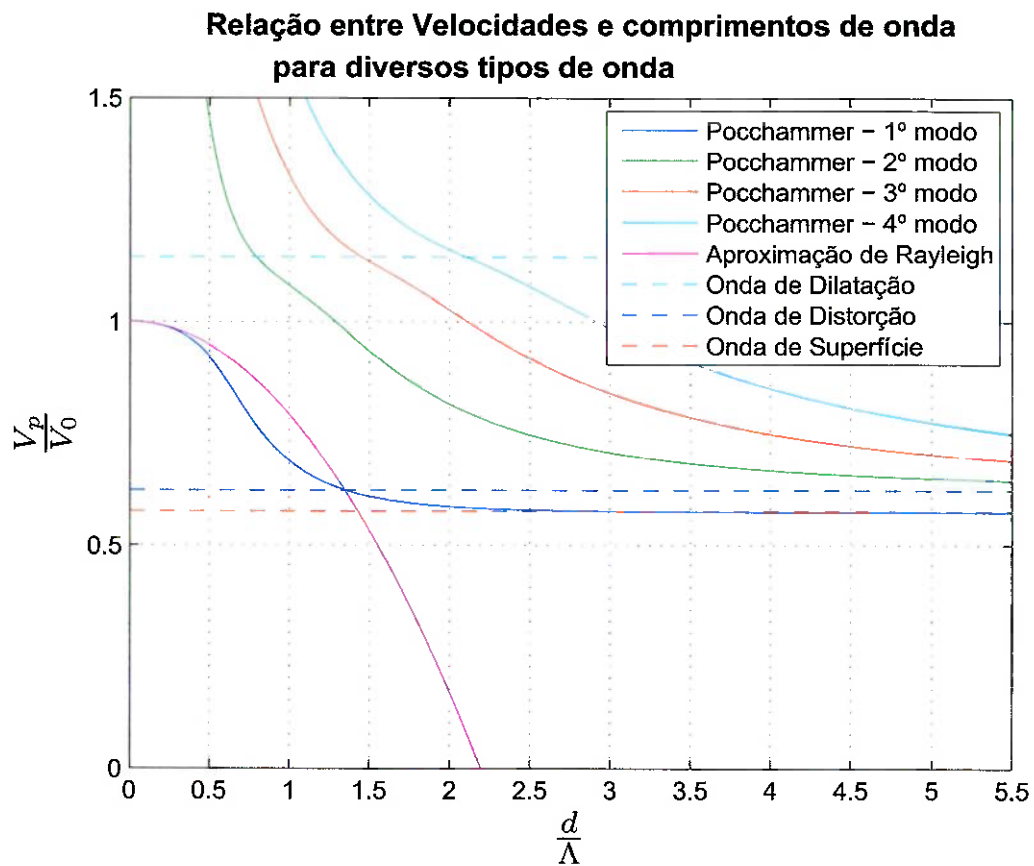


Figura 2.4: Velocidades de diversos tipos de onda

Pode-se notar que até  $\frac{d}{\Lambda} < 0.25$ , ou melhor, para comprimentos de onda pelo menos 4 vezes maiores que o diâmetro da barra, a aproximação de Rayleigh é muito boa. Para comprimentos de onda menores, é melhor utilizar soluções numéricas da equação de frequências para descobrir a velocidade de fase de um determinado comprimento de onda.

## 2.8 séries e transformadas de fourier

Esta seção tem por objetivo apresentar ao leitor as equações utilizadas em séries e transformadas de Fourier.

Qualquer pulso não periódico não tempo  $f(t)$  pode ser transformado para sua componentes de Fourier  $F(\omega)$  no domínio da frequência através de:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.174)$$

E a transformada inversa, levando do domínio da frequência para o domínio do tempo é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.175)$$

E a propriedade que realmente será importante neste trabalho é a de avanço no tempo e pode ser descrita por

$$f(t + \tau) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-i\omega\tau} \quad (2.176)$$

ou seja, para descobrirmos o valor de  $f(t + \tau)$  basta fazermos a transformada inversa de Fourier de  $F(\omega)e^{-i\omega\tau}$ .

Todas as equações acima estão no formato de integrais, o que é útil no caso de transformadas de funções contínuas. No nosso caso, a transformada de Fourier será utilizada para tratar digitalmente um sinal amostrado. Desta forma, é importante termos mente que a função a ser decomposta em uma soma de harmônicos é discreta. Deste modo, utilizaremos a Transformada Discreta de Fourier (DFT). Ela é pode ser definida para uma função discreta de  $N$  pontos por:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{\frac{-i2\pi nk}{N}} \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2.177)$$

E, de maneira análoga a Transformada inversa de Fourier para funções contínuas, temos:

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{\frac{i2\pi nk}{N}} \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2.178)$$

## Capítulo 3

# Barra de Hopkinson

Tem-se procurado modelar o comportamento dos diferentes materiais existentes. Neste esforço surgiram, além de outros, os modelos de hiperelasticidade, viscosidade e plasticidade, conforme descrito por Bois *et. al* [2]. Paralelamente surgiram testes experimentais visando determinar os parâmetros materiais necessários a modelagem matemática. Entre eles, está o teste de tração e o teste da Barra de Hopkinson, esquematizado na figura (3.1). Essa modelagem matemática, que representa o material através de uma equação constitutiva, possui parâmetros que dependem da taxa de deformação do material, tornando-se necessário um ensaio dinâmico. A SHPB permite levantar curvas de tensão-deformação a diversas taxas de deformação diferentes.

Segundo Govender [9], a utilização da mesma permite atingir uma taxa de deformação de aproximadamente  $10^4 \text{ s}^{-1}$  em testes compressivos e  $5 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  para testes de tensão e torção.

Descobrir estes parâmetros seria interessante para as seguintes aplicações:

1. Automotivas, com impacto e crash tests;
2. Aeroespacial, com impacto devido tanto a acidentes quanto a colisões com aves;
3. Militares, na criação de veículos resistentes e coletes a prova de balas;
4. Comerciais, como no forjamento rápido causado por explosão;

5. Em elementos Finitos ou outro método de simulação numérica no qual um modelo de material, como Cowper-Symonds ou Johnson-Cook, está presente, se torna necessário descrever o comportamento do material a diferentes taxas de deformação.

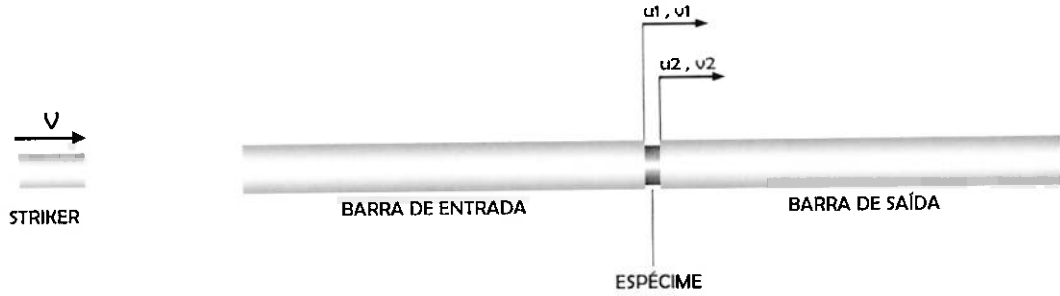


Figura 3.1: Barras do Teste de Hopkinson

O teste na SHPB consiste em atirar com uma pistola de pressão (gas gun) uma pequena barra cilíndrica, o striker, contra um conjunto três elementos: barra de entrada, corpo de prova, barra de saída. O choque do striker na barra de entrada gera uma onda de deformação,  $\varepsilon_i(t)$  que a percorre. Ao atingir o corpo de prova, parte da onda é refletida, gerando uma onda de deformação  $\varepsilon_r(t)$ , e parte percorre o corpo de prova sendo transmitida para a outra barra, criando a onda de deformação  $\varepsilon_t(t)$ . Considerando-se  $A$ ,  $E$  e  $V_0$  como a secção transversal das barras de entrada e de saída, o módulo de elasticidade das mesmas e a velocidade de onda elástica nas barras, respectivamente, podemos calcular as Forças de entrada e saída e respectivas velocidades de uma maneira simples através de:

$$F_{entrada} = AE(\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t)), \quad (3.1)$$

$$F_{saida} = AE(\varepsilon_t(t)), \quad (3.2)$$

$$V_{entrada} = V_0(\varepsilon_i(t) - \varepsilon_r(t)), \quad (3.3)$$

$$V_{saida} = V_0(\varepsilon_t(t)) \quad (3.4)$$

Assumindo-se as seguintes hipóteses ( Conforme [26]) : (i) a propagação de ondas nas barras pode ser descrita com a teoria de propagação de ondas unidimensional; (ii) o campo de tensões e de deformações é uniforme na direção axial no corpo de prova; (iii) os efeitos de inércia e de atrito no corpo de prova são desprezados; uma análise simples de um teste na SPHB pode fornecer uma curva média tensão-deformação do material. Entretanto, essas hipóteses vem sendo exaustivamente estudadas e indicam a limitação do teste. Para os metais, que representam a maior parte dos materiais estudados na SPHB, a curva média tensão-deformação é bem aceita. Para materiais não metálicos como concreto, rochas, polímeros e espumas poliméricas, a acurácia da curva é pobre.

Apesar disso, a Barra de Hopkinson ainda é usada pelos seguintes motivos (citados em [24]):

1. A medição é mais acurada que em outras técnicas alternativas, como o teste de peso em queda livre e as máquinas de teste hidráulicas de alta velocidade;
2. A não uniformidade axial devido ao comportamento da corpo de prova ira introduzir um erro similar aos outros testes com carregamentos;
3. O SHPB possui muitas informações e estudos que tentam corrigir os dados obtidos em um ensaio na finalidade de não se obter resultados bons mesmo sem considerar as hipóteses antes mencionadas.

### 3.1 Origem e passado da Barra de Hopkinson

A HPB foi introduzida por Hopkinson [12] como um meio de medir o pico de pressão durante o carregamento devido a uma detonação explosiva ou o impacto de balas. Davies [5] instrumentou a HPB com sensores capacitivos, permitindo a medida da história da pressão no tempo. Kolsky [14; 15] adaptou-a para testar materiais a altas taxas de deformação, deixando-a como na figura (3.1). Passou a se chamar então "Kolsky Bar" ou

"Split Hopkinson Pressure Bar".

Segundo Zhao [26], a SPHB passou por diversas mudanças, como ser adaptada para testes de tração [17], torção [6], compressão combinada a torção [16], fratura dinâmica [13], entre outras variações. Harding [11] também apresenta diversas destas variações a que a SHPB foi submetida ao longo do tempo. Em particular, Nemat-Nasser et al. [22] desenvolveram novas técnicas para a BH, as quais permitem realizar testes de compressão seguida de tração, possibilitando a análise do efeito de Bauschinger sob elevadas taxas de deformação. As técnicas apresentadas nesse artigo [22] também possibilitam a realização de experimentos de recuperação dinâmica, nos quais o corpo de prova é submetido a um pulso de tensão pré-definido e então é recuperado sem carregamento adicional para a análise pós teste da microestrutura. Testes com a BH também em condições de elevada temperatura também foram reportados em [21].

Meng e Li [19] utilizaram uma técnica de separação de ondas para reduzir a distância entre a interface barra-corpo de prova e o extensômetro, minimizando desta forma a dispersão e atenuação de onda durante o teste. Esta técnica de separação consiste em um método de medição de deformação em dois pontos distintos, sendo capaz de separar as ondas incidentes e refletida.

Todas essas mudanças foram feitas no sentido de adaptar o teste a certas necessidades e melhorar sua acurácia. Neste segundo objetivo, muito foi estudado sobre as limitações anteriormente descritas [26]. Como será relatado depois, os pulsos incidente, refletido e transmitidos serão medidos nas barras de entrada e saída no meio de ambas através de strain-gages. Entretanto, os efeitos de inércia lateral na barras durante a propagação das ondas de deformação elástica causa o efeito chamado dispersão, que muda o formato do pulso durante sua propagação. A acurácia poderia ser melhorada se fosse possível obter a onde de deformação na interface entre as barras e o corpo de prova a partir da leitura das mesmas ondas no meio de cada barra. Para tanto, a teoria de propagação de ondas foi

estudada por muitos. Pochhammer [23] e Chree [4] chegaram, de maneira independente, a mesma solução da equação diferencial de propagação de ondas em barras cilíndricas, a qual diz que a velocidade de propagação da onda é uma função do comprimento de onda e apresentava de maneira implícita o fenômeno da distorção. Uma tentativa de introduzir os efeitos de inércia lateral na vibração longitudinal foi apresentada por Rayleigh [25]. Love [18] Apresentou a equação governante completa, fundamentado em considerações energéticas. Bancroft [1] e Davies [5] apresentaram métodos numéricos para a solução das equações de dispersão de Pochhammer-Chree. Nesta mesma direção de corrigir a dispersão, Ghorham [8] Follansbee e Frantz [7] levaram o pulso do domínio do tempo para o domínio da frequência, aplicando então a correção e voltando o sinal para o domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier (Esta tipo de transformada é detalhadamente explicada por Brigham em [3]).

## 3.2 Modelagem matemática da Barra de Hopkinson

As equações a seguir servem de base para o funcionamento básico e tratamento de sinais da Barra de Hopkinson. Elas foram deduzidas levando-se em conta as seguintes suposições:

1. O espaço de tempo no qual as ondas de tensão percorrem o corpo de prova é muito menor que o tempo total do teste, permitindo que diversas reflexões ocorram nas extremidades do corpo de prova.
2. As tensões e velocidades nas extremidades do corpo de prova são transmitidas sem dispersão pelas barras incidente (barra de entrada) e transmissora ( barra de saída).

Adotando o mesmo material e área transversal para as barras de entrada e saída, obtemos expressões simples para a tensão, deformação e taxa de deformação no corpo de prova.

Considere as fronteiras do corpo de prova sendo 1 fronteira com a barra de entrada e 2 a fronteira com a barra de saída. Os pulsos incidente, refletido e transmitido são representados por  $\varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_t$  e sendo  $u$  os deslocamentos nas fronteiras. Podemos dizer que:

$$u_1 = \int_0^t V_0 \varepsilon_1 dt \quad (3.5)$$

e

$$u_1 = \int_0^t V_0 \varepsilon_2 dt \quad (3.6)$$

Sendo  $V_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  a velocidade elástica nas barras. Essas equações podem ser reescritas em função dos pulsos incidente, refletido e transmitido:

$$u_1 = \int_0^t V_0 (\varepsilon_i - \varepsilon_r) dt \quad (3.7)$$

e

$$u_2 = \int_0^t V_0 \varepsilon_t dt \quad (3.8)$$

Como o estado de tensão do corpo de prova é admitido constante ao longo do mesmo, temos:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{u_2 - u_1}{L_{cp}} \quad (3.9)$$

sendo  $\varepsilon_{cp}$  e  $L_{cp}$  deformação e comprimento do corpo de prova respectivamente.

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.9), obtemos:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{V_0}{L_{cp}} \int_0^t (\varepsilon_i - \varepsilon_r - \varepsilon_t) dt \quad (3.10)$$

As forças nas extremidades do corpo de prova são obtidas de:

$$\begin{aligned} P_1 &= EA(\varepsilon_i + \varepsilon_r) \\ P_2 &= EA\varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.11)$$

sendo  $E$  e  $A$  o módulo de elasticidade do material e a área da secção transversal das barras de entrada e saída. Por suposição, temos  $P_1 = P_2$ , então a partir de (3.10) e

(3.11), obtemos:

$$\varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t \quad (3.12)$$

e

$$\varepsilon_{cp} = \frac{V_0}{L_{cp}} \int_0^t (\varepsilon_i - \varepsilon_r - \varepsilon_r - \varepsilon_i) dt \quad (3.13)$$

Finalmente temos:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{-2V_0}{L_{cp}} \int_0^t \varepsilon_r dt \quad (3.14)$$

$$\sigma_{cp} = E \frac{A}{A_{cp}} \varepsilon_{cp} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{-2V_0}{L_{cp}} \varepsilon_r \quad (3.16)$$



## Capítulo 4

# Resolvendo a Equação de Frequências

### 4.1 Introdução

No teste de caracterização dinâmica utilizando a BH, como foi descrito no capítulo anterior, são medidos pulsos nas barras de entrada e saída. Toda a formulação para obter a tensão, deformação e taxa de deformação no corpo de prova é baseada nestes pulsos, que são três: incidente, refletido e transmitido, nas interfaces do corpo de prova com as barras de entrada e saída.

A medição dos pulsos de deformação é feita através de extensômetros. O problema é que, na barra de entrada, não podemos colocá-lo próximo a interface com o corpo de prova, uma vez que os pulsos incidente e refletido sofreriam interferência e seria, com somente um extensômetro, impossível obter ambos separados.

Uma possibilidade seria adotar a hipótese que o pulso de deformação não se modifica ao percorrer a barra de entrada ou de saída, sendo os sinais iguais tanto na interface com o corpo e prova quanto na posição de leitura pelos extensômetros. Este trabalho visa poder não adotar esta hipótese, já que, como visto no Capítulo 2, um pulso de deformação se modifica ao percorrer uma barra cilíndrica de acordo com a Equação de Frequências, Eq. (2.163).

Como a própria Equação de Frequências mostra, a velocidade de cada componente de frequência possui uma velocidade de propagação diferente, chamada de velocidade de

fase. Sendo assim, um modo de descobrirmos o sinal na interface do corpo de prova com as barras seria corrigir o mesmo no domínio da frequência, usando a Transformada Discreta de Fourier e utilizando a propriedade de pulse shifting em cada componente.

A propriedade do pulso shifting consiste em multiplicar por cada componente um fator  $e^{-i\omega\tau}$ .  $\tau$  seria o tempo que cada componente demora para alcançar uma determinada posição e pode ser calculado a partir da distancia entre a posição na qual deseja-se saber o formato do pulso de deformação e da posição na qual ele é lido pelo extensômetro. Assim, para cada frequência, teremos um  $\tau$  diferente, do seguinte modo:

$$\tau(\omega) = \frac{z}{f(\omega)} \quad (4.1)$$

Uma vez traçado um gráfico da Velocidade de Fase em função da Frequência, podemos descobrir o formato de um pulso de deformação no tempo para qualquer posição de uma barra cilíndrica, inclusive na interface da barra de entrada com o corpo de prova e na da barra de saída com o corpo de prova.

## 4.2 Resolvendo a equação de Pocchammer-Chree

O primeiro a resolver numericamente a equação de frequências foi Bancroft [1]. Após certa análise dimensional, ele a reescreveu no seguinte formato:

$$(x - 1)^2 \varphi(h'a) - (\beta x - 1) [x - \varphi(\kappa'a)] = 0 \quad (4.2)$$

com

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{p}{\gamma} & V_0 &= \sqrt{\frac{E}{\rho}} & x &= (1 + \nu) \left( \frac{V_p}{V_0} \right)^2 \\ h' &= \gamma \sqrt{\beta x - 1} & \kappa' &= \gamma \sqrt{2x - 1} & \Lambda &= \frac{2\pi}{\gamma} \\ \beta &= \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} & \varphi(y) &= y \frac{J_0(y)}{J_1(y)} \end{aligned}$$

Para valores de  $0 \leq \nu \leq 0.5$ . Deste modo, podemos encontrar  $\frac{V_p}{V_0}$  em função de  $\frac{d}{\Lambda}$  para diversos valores do coeficiente de Poisson  $\nu$ . O gráfico na figura 4.1 ilustra estes resultados:

### Mapeamento das Soluções da Equação de Frequências para Diversos Coeficientes de Poisson

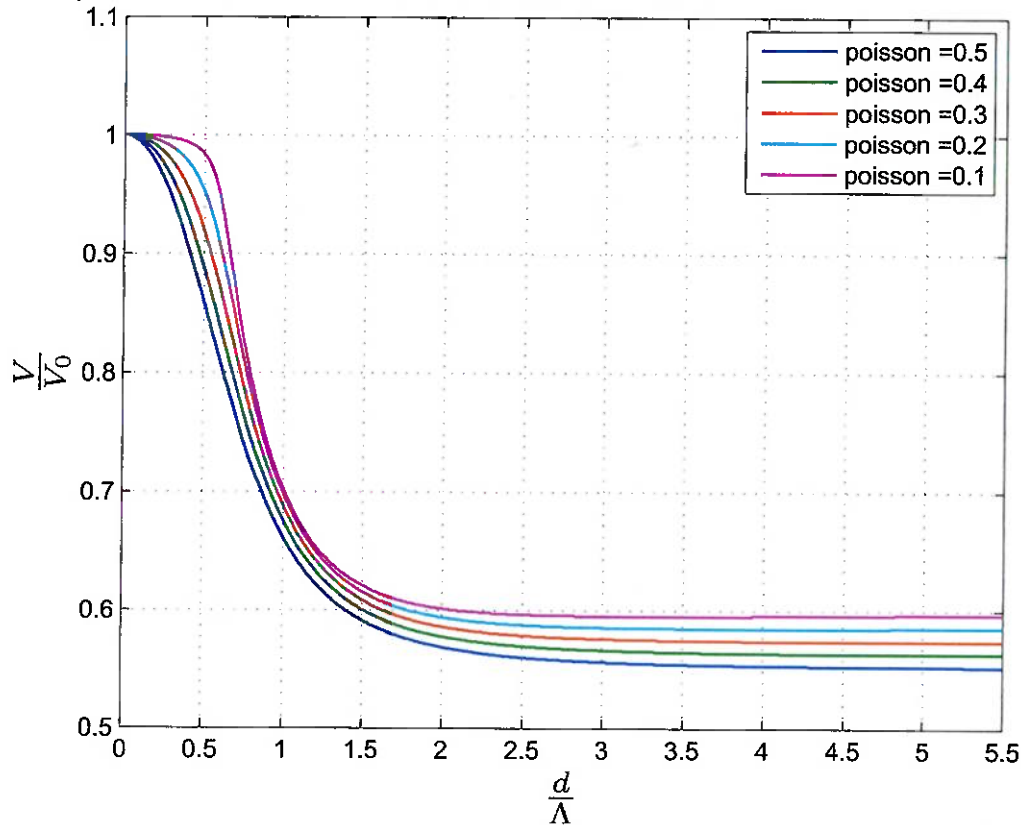


Figura 4.1: Soluções da equação de frequências para diversos valores de coeficiente de Poisson

Desejamos saber a velocidade de fase em função da frequência. Esta pode ser obtida multiplicando-se o valor da ordenada pela abscissa de cada ponto, multiplicando por  $V_0$  e dividindo pelo diâmetro, uma vez que:

$$\frac{d V_p}{\Lambda V_0} = \frac{d V_p}{V_0 \Lambda} = \frac{d}{V_0} f \quad (4.3)$$

E então obtemos o gráfico na figura (4.2)

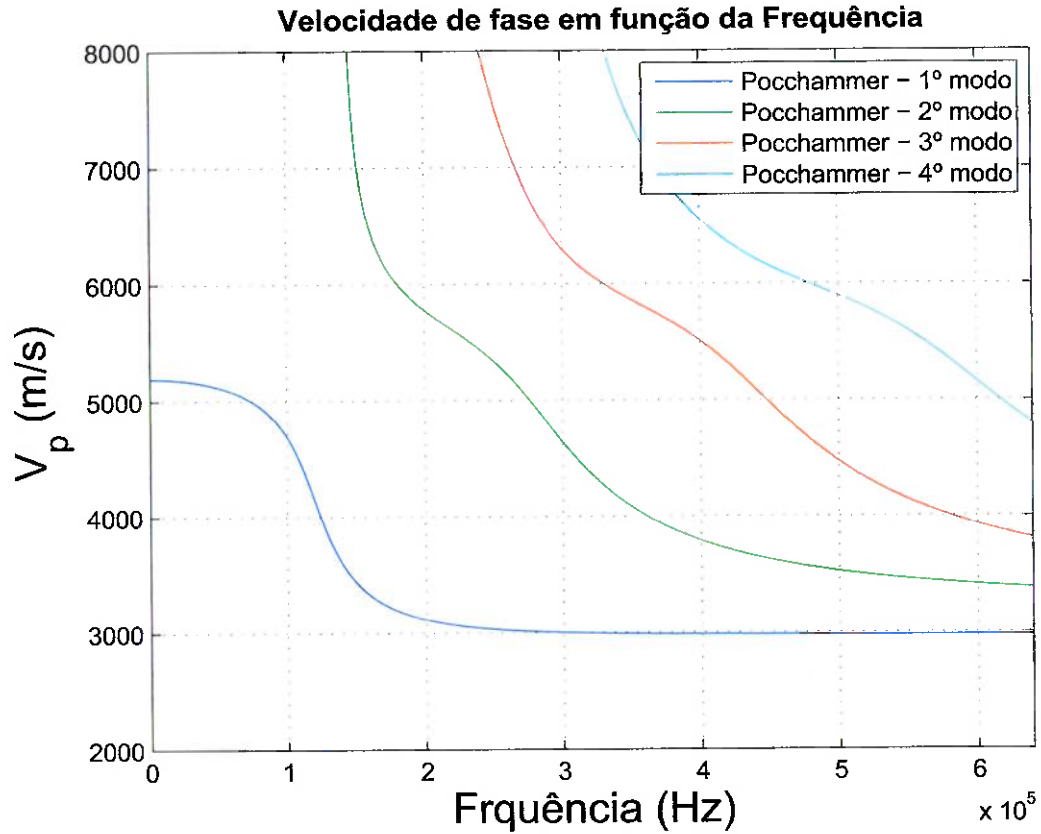


Figura 4.2: Velocidade de Fase em função da Frequência

### 4.3 Velocidade de grupo

Como pode ser notado, existe mais de uma solução para a equação de frequências, sendo que cada uma corresponde a um modo de vibrar. Então para um dada frequência, existe mais de uma velocidade de fase possível, cada uma pertencendo a um modo de vibrar. Para escolhermos em qual modo uma estrutura está vibrando e conseqüentemente qual é realmente a velocidade de fase para uma dada componente de frequência, devemos descobrir a velocidade de grupo em função da frequência de cada modo de vibrar. Davies [5] estabeleceu a seguinte relação:

$$\frac{V_g}{V_0} = \frac{V_p}{V_0} + \frac{d}{\lambda} \left( \frac{d \frac{V_p}{V_0}}{d \frac{d}{\lambda}} \right) \quad (4.4)$$

Apenas utilizando esta relação, obtemos o seguinte gráfico na figura (4.3)

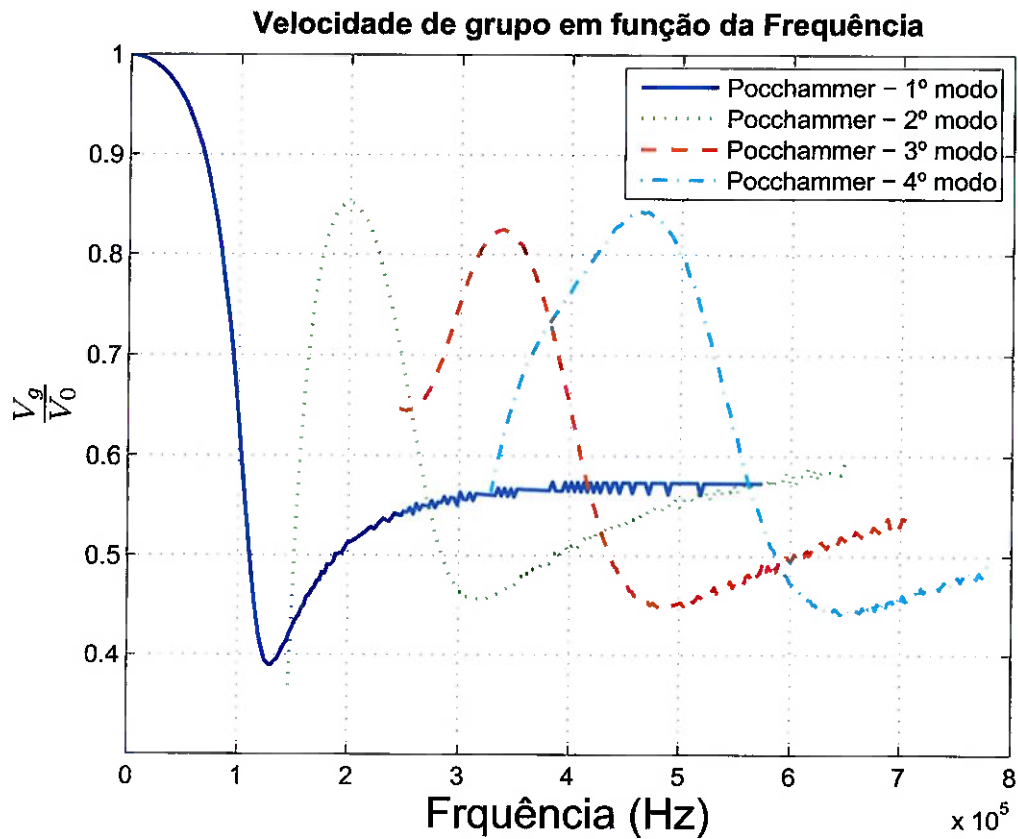


Figura 4.3: Velocidade de Grupo em função da Frequência

#### 4.4 Mapa de correções

Agora basta separarmos os intervalos de frequência, utilizando como abscissa de separação entre um modo de vibrar e outro a frequência na qual modos de vibrar subsequentes possuem mesma velocidade de grupo. Desta forma, obtemos o gráfico da figura (4.4)

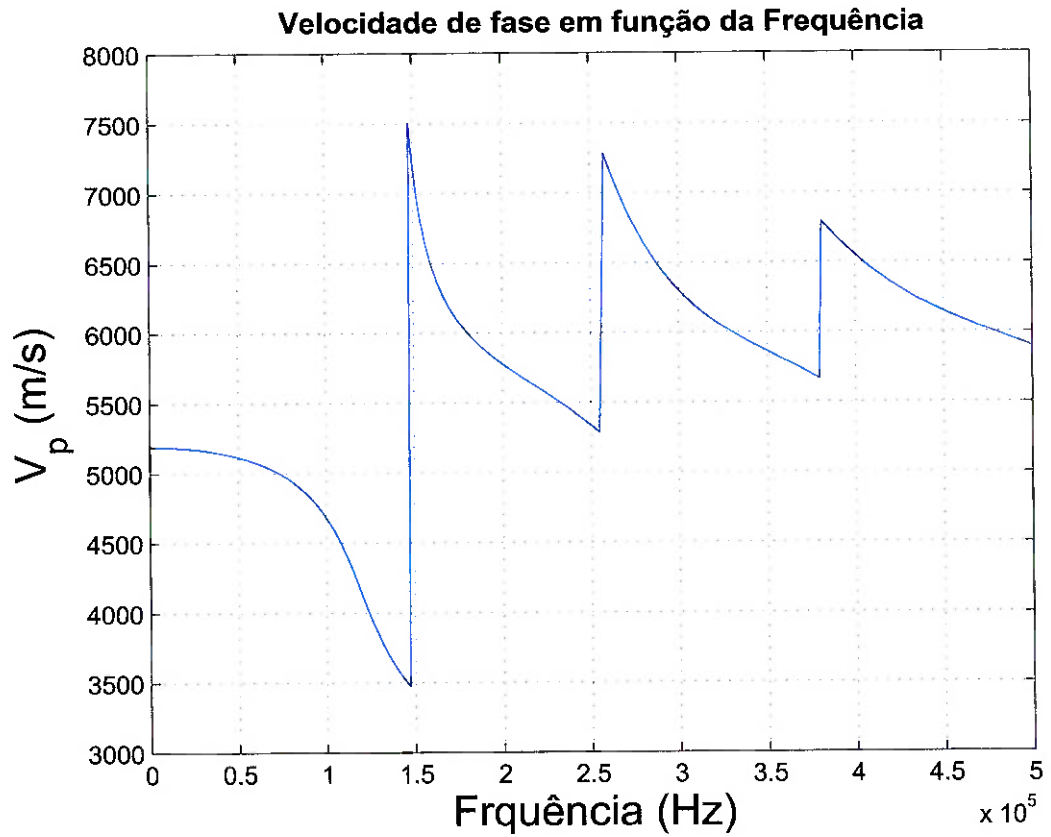


Figura 4.4: Mapa de Correções

Este é o mapa de Correções e com ele podemos aplicar a propriedade do pulse shifting, descobrindo o formato de um pulso em função do tempo para qualquer posição em uma barra cilíndrica.

## Capítulo 5

# Obtenção e Tratamento do Sinal

### 5.1 Curvas a serem geradas

Como citado anteriormente, o objetivo é traçar curvas tensão x deformação a diversas taxas de deformação diferentes, sendo possível então achar os parâmetros dos modelos matemáticos que descrevem o material e levam em conta a taxa de deformação do mesmo.

Assim, de acordo com as equações (3.14), (3.16) e (3.15), é possível calcular o histórico de deformação, taxa de deformação e tensão. Cruzando os dados de tensão com o de deformação de mesmos instantes no tempo, pode-se traçar uma curva tensão deformação de engenharia. Achando as tensões reais e deformações logarítmicas, com o mesmo procedimento, traça-se a curva de tensão verdadeira por deformação logarítmica. Uma taxa de deformação média é calculada a partir do histórico da mesma no tempo. Assim, diz-se que as curvas de tensão x deformação e de tensão real x deformação logarítmica são relativas a esta taxa de deformação média.

De (3.11), pode-se avaliar o teste. As pressões do corpo de prova devem ser iguais. Deste modo,  $\varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t$  para todos os instantes de tempo. Porém é sabido que um certo tempo é necessário para que o equilíbrio dinâmico seja atingido. Assim, os pontos antes do equilíbrio não terão valor real, mas apenas de estimativa. Por isso é traçado um outro gráfico, onde estão em uma curva  $\varepsilon_i + \varepsilon_r$  e  $\varepsilon_t$  em outra.

## 5.2 Descrição do sinal adquirido

A figura (5.1) mostra sinal adquirido de ambos extensômetros.

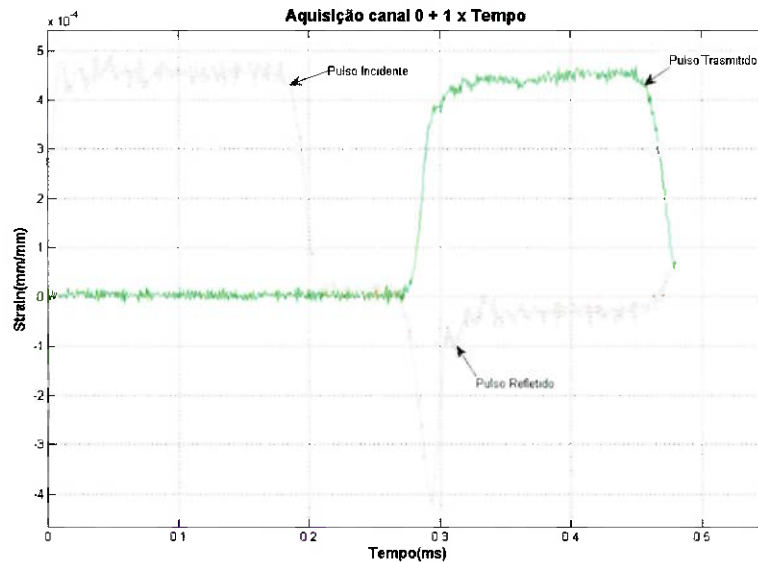


Figura 5.1: Sinais adquiridos em ambos os extensômetros.

Certa análise em frequência do sinal nos mostra que o pulso incidente é composto por mais de uma frequência, como mostra a figura (5.2).

## 5.3 Exemplo da correção de um pulso ideal

Foi criado um pulso de deformação no tempo ideal, para mostrarmos passo a passo como aplicamos a correção da dispersão. Este pulso é ideal por ser trapezoidal, seguindo a teoria de impacto em barras cilíndricas. Ele foi criado com valores de período e amplitude do sinal muito semelhantes a um pulso real obtido a operação da SPHB com 2 bar de pressão no gas gun e está representado na figura (5.3). O objetivo é descobrir o pulso em uma posição 900mm anterior. O diâmetro do cilindro foi considerado uma polegada ou  $d = 25,4\text{mm}$ , ou seja, igual ao diâmetro real da barra utilizada na SPHB presente

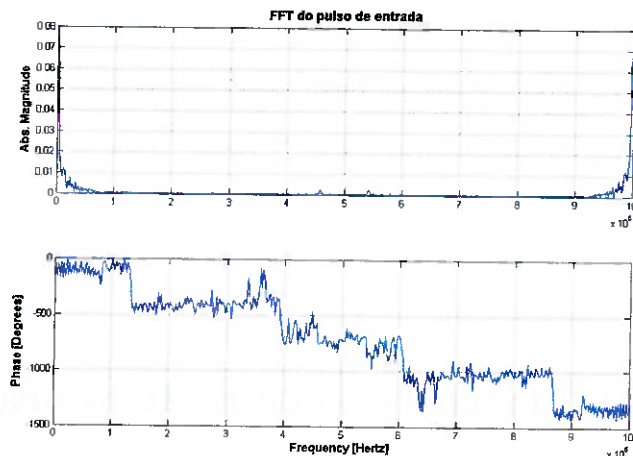


Figura 5.2: FFT do pulso incidente.

no Laboratório de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas. Foi considerado um Coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,29$ .

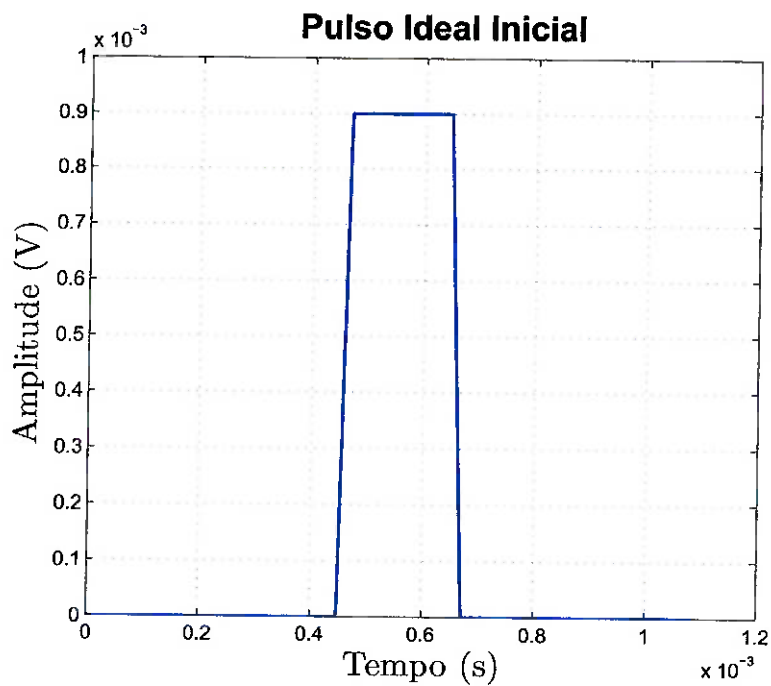


Figura 5.3: Pulso inicial

Como mencionado anteriormente, é necessário estarmos no domínio da frequência para podermos descobrir como era o pulso em uma posição anterior. Essa decomposição segue as formulações apresentadas no capítulo 2. Deste modo, a representação do mesmo no domínio da frequência encontra-se na figura (5.4)

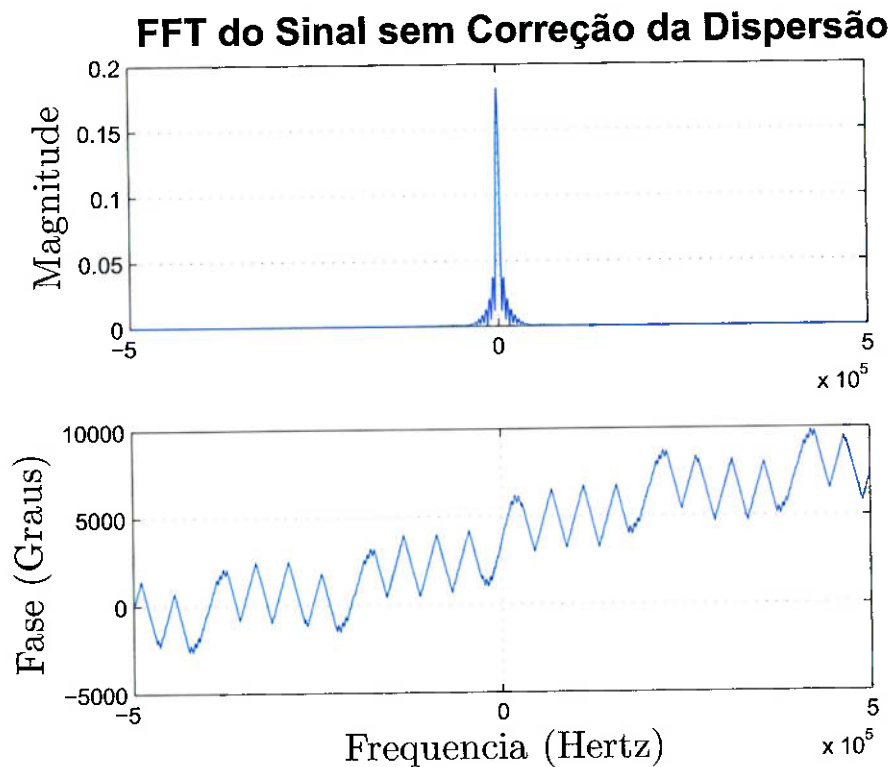


Figura 5.4: FFT do pulso ideal

Então montamos mapa de correção a partir dos dados das componentes de frequência presentes na FFT do sinal e na relação das respectivas velocidades de fase, representado na figura 5.5

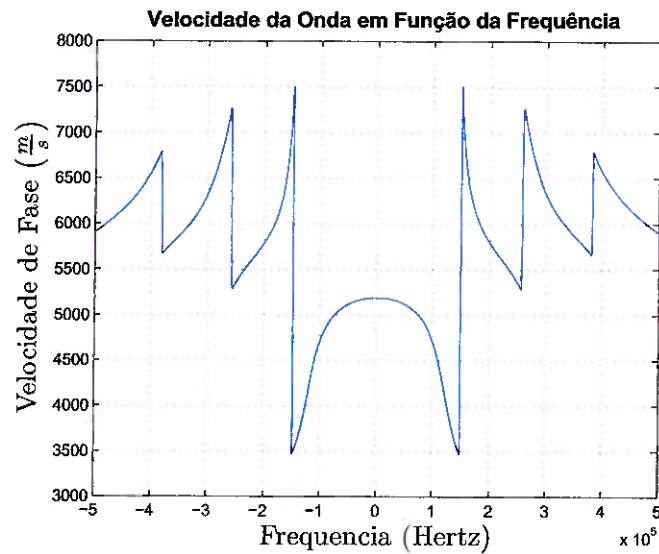


Figura 5.5: Mapa de correção

Com o conhecimento da velocidade de fase de cada frequência e a distância entre a posição em que conhecemos o pulso e a qual desejamos saber como era ou será o pulso, podemos descobrir o tempo necessário para atraso ou avanço de fase utilizado no pulse shifting. Este mapa está na forma de um gráfico na figura 5.6

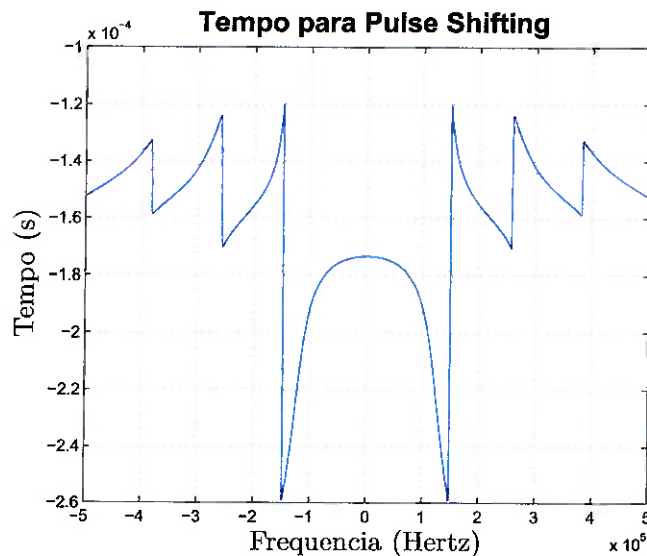


Figura 5.6: Tempos utilizados no pulse shifting em função da frequência

Basta agora aplicarmos tal propriedade para obtermos o gráfico da figura (5.7) como descrição do pulso no domínio da frequência a  $900mm$  antes da posição em que é observado o pulso de deformações ideal.

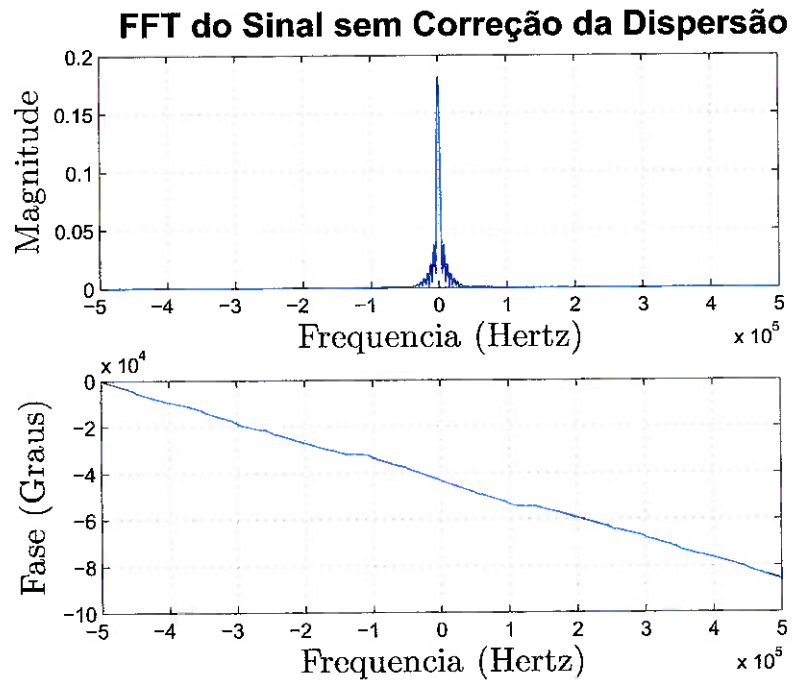


Figura 5.7: FFT do pulso corrigido

E utilizando a Transformada Inversa de Fourier, podemos comprovar a modificação do pulso de deformações durante sua propagação em uma barra cilíndrica de aço de uma polegada de diâmetro, através da figura 5.8.

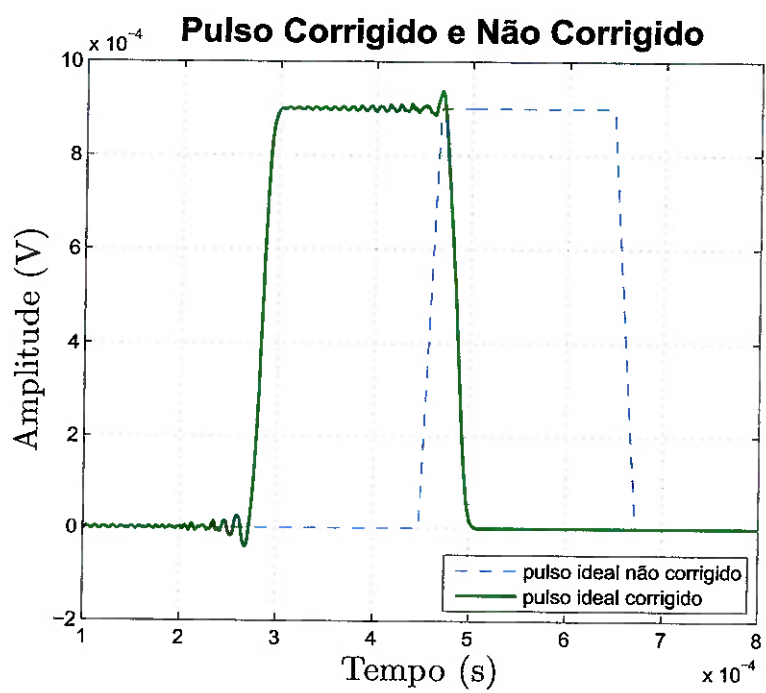


Figura 5.8: Sinais no tempo de pontos com 900mm de distância



## Capítulo 6

# Testes e Resultados Obtidos

### 6.1 Testes realizados na Barra de Hopkinson

A figura (6.1) indica como são na realidade os pulsos de deformação refletidos e transmitidos na interface das barras com o corpo de prova. O pulso incidente, apesar de não ser utilizado na formulação aparece por estar sendo captado pelo extensômetro na barra de entrada que mede as deformações refletidas. Por tanto ele não está em sua forma corrigida, ou seja, no ponto da interface com o corpo de prova, já que a correção deste pulso deve propagá-lo de maneira positiva no tempo, ao contrário dos pulsos refletido e transmitido.

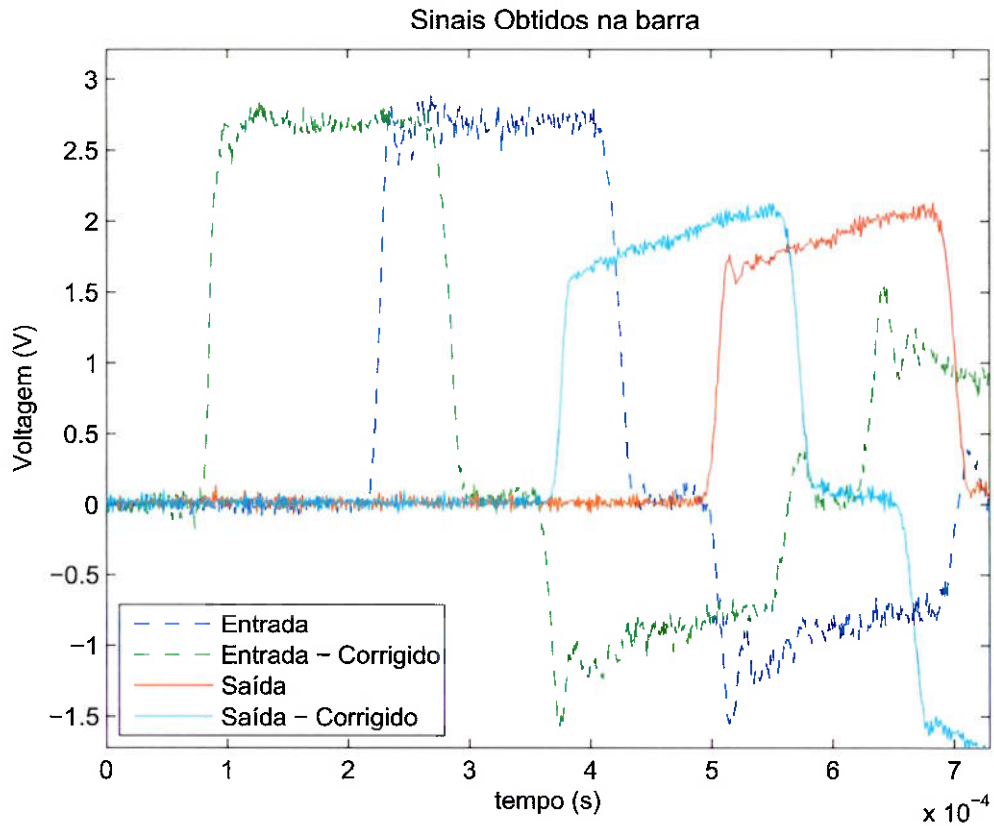


Figura 6.1: Ondas nos dois extensômetros corrigidas em função dos pulsos refletido e transmitido

Com estes pulsos somos capazes de calcular gráficos de tensão deformação. Como pode-se avaliar a partir da figura (6.2), a maior mudança se dá logo após o período de subida do pulso refletido e ocasionará na correção da transição entre regimes elástico e plástico para uma curva de tensão deformação obtida na BH.

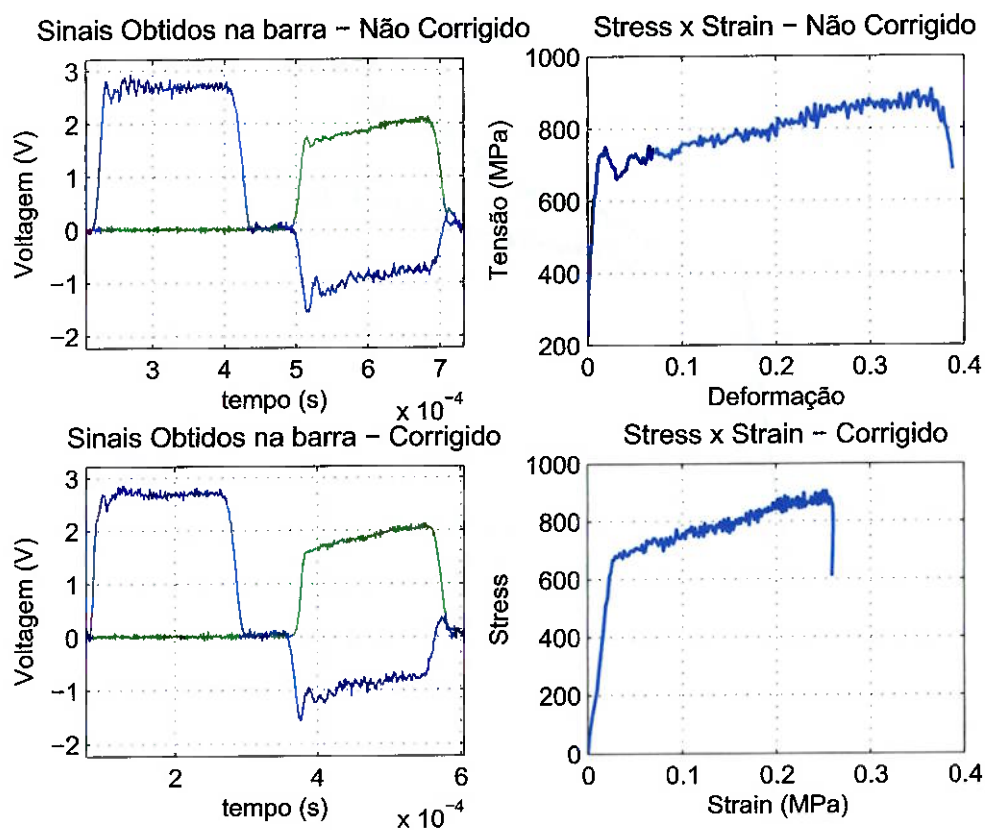


Figura 6.2: Resultados antes e após correção

Assim, podemos considerar os gráficos das figuras (6.3) e (6.4), o resultado obtido do ensaio experimental para um anel de aço, sendo o striker lançado com 2 bar de pressão.

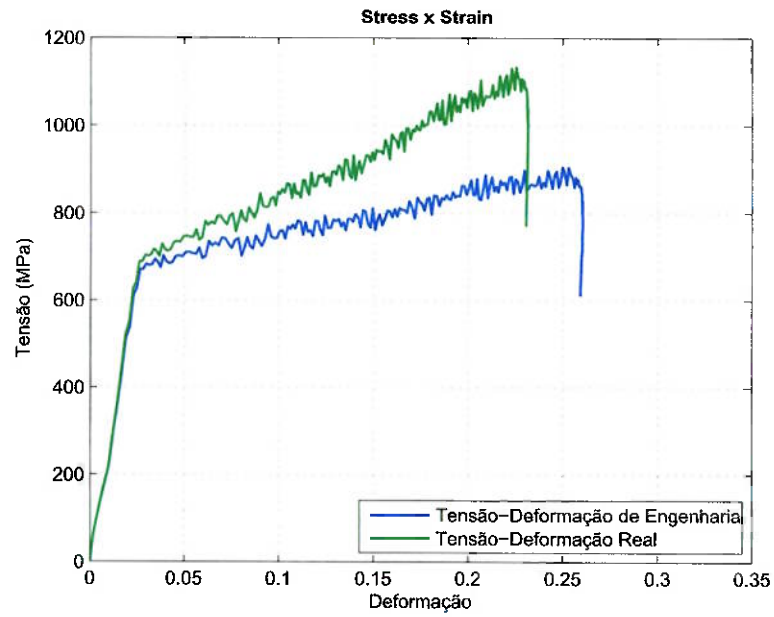


Figura 6.3: Tensão x deformação de um teste em um anel de aço com pressão de 2 bar no striker

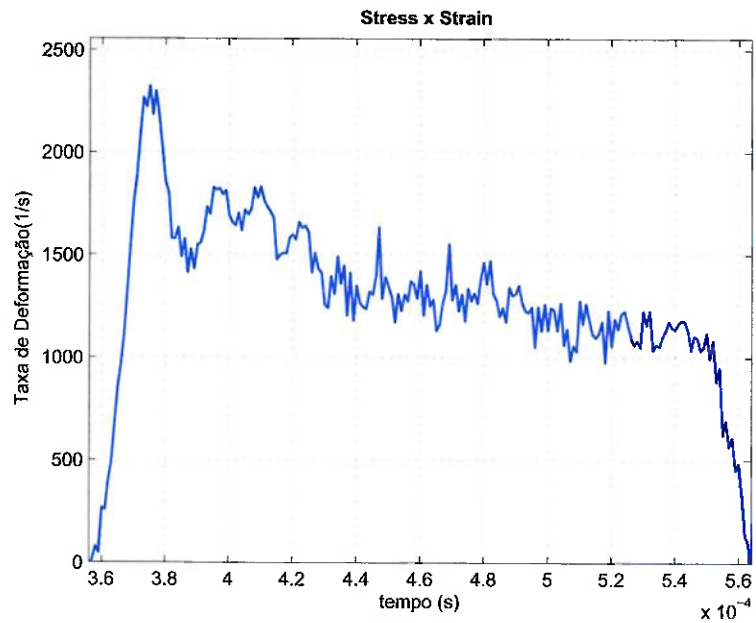


Figura 6.4: Taxa de Deformação no tempo de um teste em um anel de aço com pressão de 2 bar no striker

## Capítulo 7

# Discussões e Conclusões

### 7.1 Conclusões

O trabalho demonstrou excelentes resultados, dando maior eficiência e confiabilidade aos dados obtidos na Barra de Hopkinson do laboratório do Grupo de Mecânica dos Sólidos e Impacto em Estruturas.

Esperávamos mudanças no gráfico tensão deformação, principalmente no domínio de pequenas deformações, mais especificamente na parte elástica. Essa mudança foi verificada nos resultados.

O tratamento dos sinais antes deste trabalho era difícil, uma vez que admitia-se que os pulsos de pressão não se alteravam com a propagação pela barra cilíndrica e, então, era necessário estimar em qual instante cada pulso começava e terminava. Isto tornou-se desnecessário porque, agora, os pulsos são obtidos nas interfaces, e ambos possuem os mesmo instantes de começo e fim. Essa dificuldade anterior se tornava ainda mais grave e influente nos resultados porque as distancias entre a interface com o corpo de barra e os extensômetros não são as mesmas para as duas barras, divergindo em mais de um centímetro. Isto, em um teste de duração em torno de  $200\mu s$  e velocidades próximas a  $5000\frac{m}{s}$ , podem tornar os resultados duvidosos.

Assim, resolvido estes problemas, além de aumentarmos a acurácia do teste porque sabemos o formato das ondas de deformação nas interfaces com o corpo de prova, facili-

tamos uma automação do teste, já que um ponto que muito dependia de análise humana foi retirado do processo de caracterização dinâmica.

## 7.2 Trabalhos futuros

Um importante trabalho futuro seria introduzir um *pulse shaper*. Este consiste em um objeto de formato a ser estudado colocado imediatamente antes da barra de entrada, de forma a servir de um filtro passa baixa ao se deformar com o impacto do striker. Essa mudança permitiria dois aspectos importantes: aumentar ainda mais a acurácia do regime elástico do teste, permitindo um rápido equilíbrio dinâmico entre as interfaces do corpo de prova, e tornar a taxa de deformação o mais constante possível durante o ensaio.

Outra modificação que realmente aumentaria a precisão do teste, ou seja, sua reprodutibilidade, seria a troca de válvulas proporcionais manuais por equivalentes elétricas, no controle da pressão inserida no reservatório de ar comprimido responsável por acelerar o striker. Uma pequena variação da velocidade com que o striker atinge a barra de entrada pode alterar significativamente os resultados.

Seria deveras interessante corrigir os efeitos de atenuação, que também variam para cada componente de frequência, e a variação da deformação em função da distância do centro da barra cilíndrica. Além disso, no sentido de deixar o teste totalmente automatizado, um interface gráfica será criada.

Ainda no sentido de aumentar o máximo possível a acurácia do teste, métodos auxiliares de medição poderiam ser testados, como um laser ou uma câmera de alta velocidade.

# Referências Bibliográficas

- [1] BANCROFT, D. The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars. *Physical Review*, Vol. 59 (1941).
- [2] BOIS, P. A. D., KOLLIN, S., KOESTERS, M., AND FRANK, T. Material behavior of polymers under impact loading. *International Journal os Impact Engineering*, 32 (2006), pp 725 – 240.
- [3] BRINGHAM, E. O. *The fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [4] CHREE, C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinate, their solution and applications. *Cambridge Philosophical Society Transactions*, Vol. 14 (1941), pp 250 – 369.
- [5] DAVIES, R. M. A critical study of the hopkinson bar. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 240 (1948), pp 375 – 457.
- [6] DUFFY, J., CAMPBELL, J. D., AND RAWLAY, R. H. On the use of a torsional split hopkinson bar to study rate effects in 1100-0 aluminium. *J. Appl. Mech.*, Vol. 38 (1971), pp 83 – 91.
- [7] FOLLANSBEE, P. S., AND FRANTZ, C. Wave propagation in the split hopkinson pressure bar. *Journal of Engineering Materials and Technology Vol. 105* (1983), pp. 61 – 66.
- [8] GORHAM, D. A. A numerical method for the correction of dispersion in pressure bar signals. *J. Phys. E. Sci. Instrm. Vol. 16* (1983), pp. 477 – 479.

- [9] GOVENDER, R. A. *Numerical Investigation of Dispersion in Hopkinson Pressure Bars*. Dissertação de mestrado, University of Cape Town, 2005.
- [10] GRAFF, K. F. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Publications, Inc., New York, 1975.
- [11] HARDING, J. Testing techniques at very high rates of strain. *O.U.E.L. Report*, N. 1308/80 (1980), pp 8 – 24.
- [12] HOPKINSON, B. A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets. *Proc. Roy. Soc. London*, 62 (1949), pp 676 – 700.
- [13] KLEPACZKO, J. Application of the split hopkinson pressure bar to fracture dynamics. *Inst. Phys. Conf. Ser.*, N. 47, Capítulo 2 (1979), pp 201 – 214.
- [14] KOLSKY, H. An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of load. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 213 (1914), pp 437 – 456.
- [15] KOLSKY, H. *Stress Waves in Solids*. New York Dover Publications, 1963.
- [16] LEWIS, J. L., AND GOLDSMITH, W. A biaxial split hopkinson bar for simultaneous torsion and compression. *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 44, N. 7 (1973), pp 811 – 813.
- [17] LINDHOLM, U. S., AND YEAKLEY, L. M. High strain-rate testing: Tension and compression. *Experimental Mechanics*, Vol. 8, N. 1 (1968), pp 1 – 9.
- [18] LOVE, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications, New York, 1944.
- [19] MENG, H., AND LI, Q. M. An spherically symmetric set-up with reduced time-shift and pressure bar length. *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 28 (2003), pp 677 – 696.
- [20] MEYERS, M. A. *Dynamic Behavior of Materials*. John Wiley and Sons, 1994.
- [21] MULLER, T. High strain rate behavior of iron and nickel. *Journal Mechanical Engineering Science*, Vol. 14, N. 3 (1972), pp 161 – 167.

- [22] NEMAT-NASSER, S., ISAACS, J. R., AND STARRETT, J. E. Hopkinson techniques for dynamic recovery experiments. *Proc. R. Soc. London A*, 435 (1991), pp 371 – 391.
- [23] POCHAMMER, L. On the propagation velocities of small oscillations in an unlimited isotropic circular cylinder. *J. f. Math. (Crelle)*, Vol. 81 (1876), pp 324 – 326.
- [24] R. MERLE, H. Z. On the errors associated with use of large diameter shpb, correction for radially non-uniform distribution of stress and particle velocity in shpb testing. *International Journal of Impacto Engineering* (2005).
- [25] RAYLEIGH, J. W. S. *The Theory of Sound*, vol. 3. Dover Publications, New York, 1945.
- [26] ZHAO, H. Material behavior characterisation using shpb techniques, tests and simulations. *Computers and Structures*, 81 (2003), pp 1301 – 1310.



## APÊNDICE



# Apêndice A

## Arquivos .m

### A.1 resolvendo a equação de frequências para diferentes valores de $\nu$

```
clear all
clc
%achando os valores iniciais para calculo de cada modo de vibrar da
%estrutura

a=25.4e-3;
VetorAlfa=[5.5:-0.01:0];
VetorAlfa(length(VetorAlfa))=1e-50;
int=0.001;
poisson=[0.5 0.4 0.3 0.2 0.1];

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 16 15.9 13]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

for (il=1:length(poisson))
    ni=poisson(il);
```

```

for (i4=1:length(VetorAlfa))
    lambda=2*a/VetorAlfa(i4);
    i2=1;
    i3=1;
    if (i4==1)
        x=(1+ni)*(0.5^2);
    else
        x=x-10*int;
    end
    while (x<(1+ni)*(1.8^2) & i3<2)

        beta=(1-2*ni)/(1-ni);
        gama=2*pi/lambda;
        h=gama*sqrt(beta*x-1);
        k=gama*sqrt(2*x-1);
        y(i2)=real(((x-1)^2)*fi(h*a)-(beta*x-1)*(x-fi(k*a)));
        if (i2>1)
            if (y(i2)<1e-1 & y(i2)*y(i2-1)<0)
                sol(i3)=x+(int/2);
                i3=i3+1;
            end
        end
        x=x+int;
        i2=i2+1;

    end
    resultado(i4)=sqrt(sol(1)/(1+ni));
end
plot(VetorAlfa,resultado,'LineWidth',1.1)
hold all
end

if(length(poisson)>1)
    for(i5=1:length(poisson))
        legenda(i5,:)=['poisson =' num2str(poisson(i5)) ];
    end
    legend(legenda)
    title('Mapeamento das Soluções da Equação de Frequências
        \newline para Diversos Coeficientes de Poisson','Interpreter',
        'tex','FontSize',16)
    xlabel('\frac{a}{\Lambda}','Interpreter','Latex','FontSize',17)
    ylabel('\frac{\nu}{V_0}','Interpreter','Latex','FontSize',17)
end
grid on
axis([0 5.5 0.5 1.1]);

print -depsc2 -painters 'diferentes_ni'

```

```
function [a] = fi( x )  
  
if(besselj(1,x)≠0)  
    a=x*(besselj(0,x)/besselj(1,x));  
else  
    a=1e50;  
end
```

## A.2 resolvendo a equação de frequências, encontrando os diferentes modos de vibrar

```

%Velocidade de fase
clear all

load pocchammer

auxiliar=[0:0.01:5.5];
for (ajuda=1:length(auxiliar))
    y(ajuda)=1-(0.29^2)*(pi^2)*((auxiliar(ajuda)/2)^2);
end

c_long=sqrt((1-ni)/((1+ni)*(1-2*ni)));
c_shear=sqrt((1)/(2*(1+ni)));
c_rayleigh=((0.862+1.14*ni)/(1+ni))*c_shear;

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(modo1(:,1),modo1(:,2))
grid on
hold all
plot(modo2(:,1),modo2(:,2))
plot(modo3(:,1),modo3(:,2))
plot(modo4(:,1),modo4(:,2))
plot(auxiliar,y)
plot([0 6],[c_long c_long],'--c')
plot([0 6],[c_shear c_shear],'--b')
plot([0 6],[c_rayleigh c_rayleigh],'--r')
axis([0 5.5 0 1.5])
legend('Pocchammer - 1° modo','Pocchammer - 2° modo',
    'Pocchammer - 3° modo','Pocchammer - 4° modo','Aproximação de Rayleigh',
    'Onda de Dilatação','Onda de Distorção','Onda de Superfície')
xlabel('\frac{d}{\lambda}','Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('\frac{V_p}{V_0}','Interpreter','Latex','FontSize',17)
title('\fontsize{12} \bi Relação entre Velocidades e comprimentos de onda
    \newline para diversos tipos de onda','Interpreter','tex')

print -depsc2 -painters 'Velocidades_diversos_tipos_de_onda'

tam=size(modo1);
for(i=1:tam(1))

```

```

    freq1(i,1)=modol(i,1)*modol(i,2)*sqrt((21e10)/(7800))/(25.4e-3);
    freq1(i,2)=modol(i,2)*sqrt((21e10)/(7800));
end

tam=size(modol2);
for(i=1:tam(1))
    freq2(i,1)=modo2(i,1)*modo2(i,2)*sqrt((21e10)/(7800))/(25.4e-3);
    freq2(i,2)=modo2(i,2)*sqrt((21e10)/(7800));
end

tam=size(modol3);
for(i=1:tam(1))
    freq3(i,1)=modo3(i,1)*modo3(i,2)*sqrt((21e10)/(7800))/(25.4e-3);
    freq3(i,2)=modo3(i,2)*sqrt((21e10)/(7800));
end

tam=size(modol4);
for(i=1:tam(1))
    freq4(i,1)=modo4(i,1)*modo4(i,2)*sqrt((21e10)/(7800))/(25.4e-3);
    freq4(i,2)=modo4(i,2)*sqrt((21e10)/(7800));
end

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(freq1(:,1),freq1(:,2))
grid on
hold all
plot(freq2(:,1),freq2(:,2))
plot(freq3(:,1),freq3(:,2))
plot(freq4(:,1),freq4(:,2))
axis([0 6.4e5 2000 8000])
legend('Pocchammer - 1° modo','Pocchammer - 2° modo',
       'Pocchammer - 3° modo','Pocchammer - 4° modo')
xlabel('Frequência (Hz)', 'FontSize',17)
ylabel('V_p (m/s)', 'FontSize',17)
title('\fontsize{12} \bf Velocidade de fase em função da Frequência',
       'Interpreter','tex')

print -depsc2 -painters 'Velocidades_fase_frequencia'

tam=size(modol);
for(i=tam(1):-1:2)
    derivada_freq1(i,1)=freq1(i,1);
    derivada_freq1(i,2)=(modol(i-1,2)-modol(i,2))/
    (modol(i-1,1)-modol(i,1));
end
derivada_freq1(1,1)=freq1(1,1);

```

## A.2. resolvendo a equação de frequências. encontrando os diferentes modos de vibrar

---

```
derivada_freq1(tam(1),2)=0;

tam=size(modos2);
for(i=tam(1):-1:2)
    derivada_freq2(i,1)=freq2(i,1);
    derivada_freq2(i,2)=(modos2(i-1,2)-modos2(i,2))/
    (modos2(i-1,1)-modos2(i,1));
end
derivada_freq2(1,1)=freq2(1,1);
derivada_freq2(tam(1),2)=derivada_freq2(tam(1)-1,2);

tam=size(modos3);
for(i=tam(1):-1:2)
    derivada_freq3(i,1)=freq3(i,1);
    derivada_freq3(i,2)=(modos3(i-1,2)-modos3(i,2))/
    (modos3(i-1,1)-modos3(i,1));
end
derivada_freq3(1,1)=freq3(1,1);
derivada_freq3(tam(1),2)=derivada_freq3(tam(1)-1,2);

tam=size(modos4);
for(i=tam(1):-1:2)
    derivada_freq4(i,1)=freq4(i,1);
    derivada_freq4(i,2)=(modos4(i-1,2)-modos4(i,2))/
    (modos4(i-1,1)-modos4(i,1));
end
derivada_freq4(1,1)=freq4(1,1);
derivada_freq4(tam(1),2)=derivada_freq4(tam(1)-1,2);

%
% figure
% plot(derivada_freq1(:,1),derivada_freq1(:,2))
% grid on
% hold all
% plot(derivada_freq2(:,1),derivada_freq2(:,2))
% plot(derivada_freq3(:,1),derivada_freq3(:,2))
% plot(derivada_freq4(:,1),derivada_freq4(:,2))

tam=size(modos1);
for(i=tam(1):-1:25)
    Cg1(i-24,1)=freq1(i,1);
    Cg1(i-24,2)=(modos1(i,2)+modos1(i,1)*derivada_freq1(i,2));
end

tam=size(modos2);
for(i=tam(1)-1:-1:26)
```

```

    Cg2(i-25,1)=freq2(i,1);
    Cg2(i-25,2)=(modo2(i,2)+modo2(i,1)*derivada_freq2(i,2));
end

tam=size(modo3);
for(i=tam(1)-3:-1:26)
    Cg3(i-25,1)=freq3(i,1);
    Cg3(i-25,2)=(modo3(i,2)+modo3(i,1)*derivada_freq3(i,2));
end

tam=size(modo4);
for(i=tam(1)-1:-1:26)
    Cg4(i-25,1)=freq4(i,1);
    Cg4(i-25,2)=(modo4(i,2)+modo4(i,1)*derivada_freq4(i,2));
end
%
figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(Cg1(:,1),Cg1(:,2),'LineWidth',1.4);
grid on
hold all
plot(Cg2(:,1),Cg2(:,2),'-', 'LineWidth',1.4);
plot(Cg3(:,1),Cg3(:,2),'--', 'LineWidth',1.4);
plot(Cg4(:,1),Cg4(:,2),'-.', 'LineWidth',1.4);

legend('Pocchammer - 1° modo','Pocchammer - 2° modo',
       'Pocchammer - 3° modo','Pocchammer - 4° modo')
xlabel('Frequência (Hz)','FontSize',17)
ylabel('V/V_0','Interpreter','Latex',
       'FontSize',17)
title('\fontsize{12} \bf Velocidade de grupo em função
da Frequência','Interpreter','tex')

print -depsc2 -painters 'Velocidades_grupo_frequencia'

il=1;
for(i=221:-1:178)
    mapa_correcao(il,1)=freq1(i,1);
    mapa_correcao(il,2)=freq1(i,2);
    il=il+1;
end

for(i=201:-1:172)
    mapa_correcao(il,1)=freq2(i,1);
    mapa_correcao(il,2)=freq2(i,2);

```

## A.2. resolvendo a equação de frequências, encontrando os diferentes modos de vibrar

---

```
    il=il+1;
end

for(i=185:-1:153)
    mapa_correcao(il,1)=freq3(i,1);
    mapa_correcao(il,2)=freq3(i,2);
    il=il+1;
end

for(i=164:-1:135)
    mapa_correcao(il,1)=freq4(i,1);
    mapa_correcao(il,2)=freq4(i,2);
    il=il+1;
end
%
figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(mapa_correcao(:,1),mapa_correcao(:,2))
grid on
xlabel('Frequência (Hz)', 'FontSize', 17)
ylabel('V_p (m/s)', 'FontSize', 17)
title('\fontsize{12} \bf Velocidade de fase em função da Frequência',
      'Interpreter', 'tex')

print -depsc2 -painters 'Mapa_de_correcao'
```

### A.3 criando o mapa de velocidades de fase em função da frequência

```
clear all
close all
clc
A=9e-4;
vetor=[-2.9e-4 -2.7e-4 -9.1e-5 -6.6e-5];

vetor=vetor+abs(vetor(1))+2.5*abs(vetor(3)-vetor(2));

tempo=[0:1e-6:1.6*vetor(4)];

for(aux=1:length(tempo))
    if(tempo(aux)≤vetor(1))
        data(aux)=0;
    elseif(tempo(aux)≤vetor(2))
        data(aux)=(A/(vetor(2)-vetor(1)))*(tempo(aux))-
            ((A*vetor(1))/(vetor(2)-vetor(1)));
    elseif(tempo(aux)≤vetor(3))
        data(aux)=A;
    elseif(tempo(aux)≤vetor(4))
        data(aux)=(A/(vetor(3)-vetor(4)))*(tempo(aux))-
            ((A*vetor(4))/(vetor(3)-vetor(4)));
    else
        data(aux)=0;
    end
end

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(tempo,data,'LineWidth',1.45);
grid on
title('\fontsize{17} \bf Pulso Ideal Inicial','Interpreter','tex')
xlabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('Amplitude (V)','Interpreter','Latex','FontSize',17)

print -depsc2 -painters 'pulso_inicial'

figure
```

```

set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(tempo,data,'—');
grid on
hold all

z=-0.9;
detalhe=3;
impar=dec2binvec(length(data));
if (impar(1)==0)
    data(length(data)+1)=data(length(data));
end

%fft e gráfico do mesmo
f1=fft(data);
N=length(data);
Fo=1/(N*(tempo(2)-tempo(1)));
frequencia=Fo.*[fix(-N/2):1:fix(N/2)];

f1_shifted=fftshift(f1);

if(detalhe==1 | detalhe==3)
    Pfft1 = abs(f1_shifted);
    Afft1 = unwrap(angle(f1_shifted));
    figure;
    set(gcf, 'PaperType', 'A4');
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
    set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
    %[left bottom width height]
    set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
    set(gcf, 'Renderer', 'painters');
    subplot(2,1,1);
    plot(frequencia,Pfft1);
    title('\fontsize{17} \bf FFT do Sinal sem Correção da Dispersão',
        'Interpreter','tex')
    ylabel('Magnitudo','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    subplot(2,1,2), plot(frequencia,Afft1*180/pi)
    ylabel('Fase (Graus)','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
    print -depsc2 -painters 'tft_pulso_inicial'
end

%Corrigindo a dispersão

```

```

%Carregando mapa da Velocidade de Fase em função da Frequência
load mapa_correcao

Cphase=mapa_correcao(:,2);
Freq=mapa_correcao(:,1);

%Organizando a Frequencia ao fft gerado pelo fftshift

numero_de_pontos_de_frequencia=length(frequencia);
metade_numero_pontos_frequencia=fix(numero_de_pontos_de_frequencia/2);

Cphase_final=Cphase(length(Cphase));
Cp_int1=interp1(Freq,Cphase,frequencia(metade_numero_pontos_frequencia:
    numero_de_pontos_de_frequencia),'cubic',Cphase_final);
Cp_correcao=repmat(Cphase_final,numero_de_pontos_de_frequencia,1);
Cp_int2=zeros(metade_numero_pontos_frequencia,1);

for(n=1:(metade_numero_pontos_frequencia-1))
    Cp_int2(n)=Cp_int1(metade_numero_pontos_frequencia-n+1);
end

Cp_correcao(1:(metade_numero_pontos_frequencia))=Cp_int2;
Cp_correcao((metade_numero_pontos_frequencia+1):numero_de_pontos_de_frequencia)=
    Cp_int1(1:(metade_numero_pontos_frequencia+1));
Cp_correcao((metade_numero_pontos_frequencia-1):1:
    (metade_numero_pontos_frequencia+2))=repmat(sqrt(210e9/7800),4,1);

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [-2 17.6 18 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');
plot(frequencia,Cp_correcao);
grid on
xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('Velocidade de Fase ( $\frac{m}{s}$ )','Interpreter',
    'Latex','FontSize',17)
title('\fontsize{13} \bf Velocidade da Onda em Função da Frequência ',
    'Interpreter','tex')
print -depsc2 -painters 'mapa_correcao_positivo_e_negativo'

PhaseShift=z./Cp_correcao.';

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');

```

### A.3. criando o mapa de velocidades de fase em função da frequência

```
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');
plot(frequencia,PhaseShift);
grid on
xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
title('\fontsize{17} \bf Tempo para Pulse Shifting ', 'Interpreter','tex')
print -depsc2 -painters 'tempo_pulse_shifting'

f1_corrigido=f1_shifted.*exp(-1*i*(2*pi.*frequencia).*PhaseShift);

if(detalhe==2 | detalhe==3)

    Pfft2 = abs(f1_corrigido);
    Afft2 = unwrap(angle(f1_corrigido));
    figure;
    set(gcf, 'PaperType', 'A4');
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
    set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
    %[left bottom width height]
    set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
    set(gcf, 'Renderer', 'painters');
    subplot(2,1,1);
    plot(frequencia,Pfft2);
    title('\fontsize{17} \bf FFT do Sinal sem Correção da Dispersão',
        'Interpreter','tex')
    ylabel('Magnitudo','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
    subplot(2,1,2), plot(frequencia,Afft2*180/pi)
    ylabel('Fase (Graus)','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
    print -depsc2 -painters 'fft_pulso_corrigido'
end
signal_corrected=real(ifft(ifftshift(f1_corrigido)));
if (impar(1)==1)
    signal_corrected=real(ifft(ifftshift(f1_corrigido)));
else
    volta=real(ifft(ifftshift(f1_corrigido)));
    signal_corrected=volta(1:length(volta)-1);
end

figure(2)
plot(tempo,signal_corrected,'LineWidth',1.45)
axis([0.1e-3 0.8e-3 -.2e-3 1e-3])
legend('pulso ideal não corrigido','pulso ideal corrigido','Location','SouthEast')
title('\fontsize{17} \bf Pulso Corrigido e Não Corrigido','Interpreter','tex')
xlabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
```

```
ylabel('Amplitude (V)', 'Interpreter', 'Latex', 'FontSize', 17)  
print -depsc2 -painters 'sinais_corrigido'
```

## A.4 corrigindo um pulso trapezoidal - descobrindo o sinal 900mm antes do ponto de leitura

```
clear all
close all
clc
A=9e-4;
vetor=[-2.9e-4 -2.7e-4 -9.1e-5 -6.6e-5];

vetor=vetor+abs(vetor(1))+2.5*abs(vetor(3)-vetor(2));

tempo=[0:1e-6:1.6*vetor(4)];

for(aux=1:length(tempo))
    if(tempo(aux)≤vetor(1))
        data(aux)=0;
    elseif(tempo(aux)≤vetor(2))
        data(aux)=(A/(vetor(2)-vetor(1)))*(tempo(aux))-((A*vetor(1))/(vetor(2)-vetor(1)));
    elseif(tempo(aux)≤vetor(3))
        data(aux)=A;
    elseif(tempo(aux)≤vetor(4))
        data(aux)=(A/(vetor(3)-vetor(4)))*(tempo(aux))-((A*vetor(4))/(vetor(3)-vetor(4)));
    else
        data(aux)=0;
    end
end

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(tempo,data,'LineWidth',1.45);
grid on
title('\fontsize{17} \bf Pulso Ideal Inicial','Interpreter','tex')
xlabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('Amplitude (V)','Interpreter','Latex','FontSize',17)

print -depsc2 -painters 'pulso_inicial'
```

```

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');

plot(tempo,data,'—');
grid on
hold all

z=-0.9;
detalhe=3;
impar=dec2binvec(length(data));
if (impar(1)==0)
    data(length(data)+1)=data(length(data));
end

%fft e gráfico do mesmo
f1=fft(data);
N=length(data);
Fo=1/(N*(tempo(2)-tempo(1)));
frequencia=Fo.*[fix(-N/2):1:fix(N/2)];

f1_shifted=fftshift(f1);

if(detalhe==1 | detalhe==3)
    Pfft1 = abs(f1_shifted);
    Afft1 = unwrap(angle(f1_shifted));
    figure;
    set(gcf, 'PaperType', 'A4');
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
    set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
    %[left bottom width height]
    set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
    set(gcf, 'Renderer', 'painters');
    subplot(2,1,1);
    plot(frequencia,Pfft1);
    title('\fontsize{17} \bf FFT do Sinal sem Correção da Dispersão',
        'Interpreter','tex')
    ylabel('Magnitudo','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    subplot(2,1,2), plot(frequencia,Afft1*180/pi)
    ylabel('Fase (Graus)','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
    print -depsc2 -painters 'fft_pulso_inicial'
end

%Corrigindo a dispersão

```

#### A.4. corrigindo um pulso trapezoidal - descobrindo o sinal 900mm antes do ponto de leitura

---

```
%Carregando mapa da Velocidade de Fase em função da Frequência
load mapa_correcao

Cphase=mapa_correcao(:,2);
Freq=mapa_correcao(:,1);

%Organizando a Frequencia ao fft gerado pelo fftshift

numero_de_pontos_de_frequencia=length(frequencia);
metade_numero_pontos_frequencia=fix(numero_de_pontos_de_frequencia/2);

Cphase_final=Cphase(length(Cphase));
Cp_int1=interp1(Freq,Cphase,frequencia(metade_numero_pontos_frequencia:
    numero_de_pontos_de_frequencia),'cubic',Cphase_final);
Cp_correcao= repmat(Cphase_final,numero_de_pontos_de_frequencia,1);
Cp_int2=zeros(metade_numero_pontos_frequencia,1);

for(n=1:(metade_numero_pontos_frequencia-1))
    Cp_int2(n)=Cp_int1(metade_numero_pontos_frequencia-n+1);
end

Cp_correcao(1:(metade_numero_pontos_frequencia))=Cp_int2;
Cp_correcao((metade_numero_pontos_frequencia+1):numero_de_pontos_de_frequencia)=
    Cp_int1(1:(metade_numero_pontos_frequencia+1));
Cp_correcao((metade_numero_pontos_frequencia-1):(metade_numero_pontos_frequencia+2))=
    repmat(sqrt(210e9/7800),4,1);

figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [-2 17.6 18 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');
plot(frequencia,Cp_correcao);
grid on
xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('Velocidade de Fase ( $\frac{m}{s}$ )',
    'Interpreter','Latex','FontSize',17)
title('\fontsize(13) \bf Velocidade da Onda em Função da Frequência',
    'Interpreter','tex')
print -depsc2 -painters 'mapa_correcao_positivo_e_negativo'

PhaseShift=z./Cp_correcao.;
```

```
figure
set(gcf, 'PaperType', 'A4');
```

```

set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
%[left bottom width height]
set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
set(gcf, 'Renderer', 'painters');
plot(frequencia,PhaseShift);
grid on
xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('Tempo (s)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
title('\fontsize{17} \bf Tempo para Pulse Shifting ',
      'Interpreter','tex')
print -depsc2 -painters 'tempo_pulse_shifting'

f1_corrigido=f1_shifted.*exp(-1*i*(2*pi.*frequencia).*PhaseShift);

if(detalhe==2 | detalhe==3)

    Pfft2 = abs(f1_corrigido);
    Afft2 = unwrap(angle(f1_corrigido));
    figure;
    set(gcf, 'PaperType', 'A4');
    set(gcf, 'PaperPositionMode', 'manual');
    set(gcf, 'PaperUnits', 'centimeters');
    %[left bottom width height]
    set(gcf, 'PaperPosition', [0 17.6 15.9 12]);
    set(gcf, 'Renderer', 'painters');
    subplot(2,1,1);
    plot(frequencia,Pfft2);
    title('\fontsize{17} \bf FFT do Sinal sem Correção da Dispersão',
          'Interpreter','tex')
    ylabel('Magnitude','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
    subplot(2,1,2), plot(frequencia,Afft2*180/pi)
    ylabel('Fase (Graus)','Interpreter','Latex','FontSize',17), grid on
    xlabel('Frequencia (Hertz)','Interpreter','Latex','FontSize',17)
    print -depsc2 -painters 'fft_pulso_corrigido'
end
signal_corrected=real(iff(iffshift(f1_corrigido)));
if (impar(1)==1)
    signal_corrected=real(iff(iffshift(f1_corrigido)));
else
    volta=real(iff(iffshift(f1_corrigido)));
    signal_corrected=volta(1:length(volta)-1);
end

figure(2)
plot(tempo,signal_corrected,'LineWidth',1.45)
axis([0.1e-3 0.8e-3 -.2e-3 1e-3])
legend('pulso ideal não corrigido','pulso ideal corrigido',

```

#### A.4. corrigindo um pulso trapezoidal - descobrindo o sinal 900mm antes do ponto de leitura

---

```
'Location','SouthEast')
title('\fontsize{17} \bf Pulso Corrigido e Não Corrigido',
      'Interpreter','tex')
xlabel('Tempo (s)', 'Interpreter','Latex','FontSize',17)
ylabel('Amplitude (V)', 'Interpreter','Latex','FontSize',17)
print -depsc2 -painters 'sinais_corrigido_mais_inicial'
```